गणित

कक्षा 9 के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

आशा रानी सिंगल महेन्द्र शंकर
बी. देवकीनन्दन नरेन्द्र मिश्रा
जी.डी. ढल राम अवतार
जी.पी. दीक्षित व्ही.पी. कटारिया

सम्पादक

जी.पी. दीक्षित बी. देवकीनन्दन
महेन्द्र शंकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
जून 2002
ज्येष्ठ 1924
प्रथम पुनर्मुद्रण
जनवरी 2003
पौष 1924

ISBN 81-7450-035-9

PD 200T MB
PJST

/Catalague ... © राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2002

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैम्पस	108, 100 फीट रोड, होस्डेकेरे	नवजीवन ट्रस्ट भवन	सी.डब्लू.सी. कैम्पस
श्री अरविंद मार्ग	हेली एक्सटेंशन बनाशंकरी III इस्टेज	डाकघर नवजीवन	32, बी.टी. रोड, सुखचर
नई दिल्ली 110016	**बैंगलूर 560085**	**अहमदाबाद 380014**	**24 परगना 743179**

प्रकाशन सहयोग

संपादन : रेखा अग्रवाल
उत्पादन : अरुण चितकारा
सुनील कुमार
आवरण : शशि भट्ट

रु. 65.00

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा एस.पी.ए. प्रिंटर्स प्रा. लि. बी-17/3, ओखला इंडस्ट्रियल एरिया, फेज-2, नई दिल्ली-110020 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.पी.ई.) 1986 में सामान्य शिक्षा के एक अभिन्न अंग के रूप में गणित के पठन-पाठन की आवश्यकता पर स्पष्ट रूप से बल दिया है। चूँकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए प्रौद्योगिकी उन्मुख समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन होते रहे हैं। राष्ट्रव्यापी चर्चा एवं परामर्श के पश्चात्, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने नवम्बर, 2000 में "विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा" (एन.सी.एफ.) का प्रकाशन किया। इसमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 (1992 में संशोधित) में उपलब्ध मूल सिद्धान्तों और निर्देशों पर पुन: बल दिया गया और विद्यालयी स्तर पर गणित से संबंधित अन्य मुद्दों को विस्तारपूर्वक बताया गया।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में दर्शाई गई अपेक्षाओं और राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2000 में दिए गए सामान्य उद्देश्यों की पूर्ति हेतु लिखी गई है। इस पाठ्यपुस्तक में गणित को विद्यार्थियों के आस-पास के परिवेश से संबंधित क्रियाकलापों और प्रेरक उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत करने का प्रयत्न किया गया है।

नवीन पाठ्यक्रम के आधार पर दक्षताओं एवं अभिवृत्तियों को विकसित कर ज्ञान प्रदान करने के लिए पाठ्यपुस्तक में सम्मिलित विषयवस्तु और सुझाए गए क्रियाकलापों को संयोजित किया गया है। इस स्तर पर गणित के प्रयोग द्वारा दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए विद्यार्थियों की क्षमता में और अधिक वृद्धि करने के अतिरिक्त, गणित का एक विषय के रूप में सुव्यवस्थित रूप से अध्ययन प्रारंभ किया गया है। पाठ्यसामग्री और सुझाए गए क्रियाकलापों को हमारे देश की व्यापक विद्यालयी पद्धतियों की विभिन्न आवश्यकताओं, पृष्ठभूमि और पर्यावरण के अनुकूल बनाने का एक सार्थक प्रयास किया गया है। विषयवस्तु को सरल भाषा में प्रस्तुत करने का विशेष ध्यान रखा गया है।

पाठ्यपुस्तक का प्रथम प्रारूप विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा विकसित किया गया है जिन्हें अध्यापन और अनुसंधान का व्यापक अनुभव प्राप्त था। तत्पश्चात् एक समीक्षा

कार्यशाला में इस प्रारूप की विषयवस्तु एवं उसके प्रस्तुतिकरण की विधि को पढ़ाने वाले शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों द्वारा गहन रूप से समीक्षात्मक विवेचना की गई। समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त टिप्पणियों और सुझावों पर लेखकों ने विचार किया और इस प्रारूप को उपयुक्त रूप से संशोधित कर अंतिम पाण्डुलिपि तैयार की गई।

लेखक दल ने गणित की पूर्व पाठ्यपुस्तक के प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुझावों एवं पुनर्निवेशन का उपयोग किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में, जहाँ उपयुक्त समझा गया, लेखक दल ने पूर्व प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों के संदर्भों का भी प्रयोग किया।

इतने अल्प समय में इस पुस्तक को विकसित करने के लिए मैं लेखक दल के सदस्यों, इसके अध्यक्ष, सम्पादकों, समीक्षकों तथा इनसे संबंधित संस्थानों को धन्यवाद देता हूँ।

पुस्तक में सुधार हेतु सुझावों का स्वागत किया जाएगा।

जे.एस. राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
फरवरी, 2002

प्रस्तावना

औपचारिक शिक्षा के प्रारंभ से ही गणित विद्यालयी शिक्षा का एक अभिन्न अंग रहा है और इसने न केवल सभ्यता की उन्नति में बल्कि भौतिक विज्ञान और अन्य विषयों के विकास में भी प्रबल भूमिका निभाई है। चूँकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन हुए हैं। माध्यमिक स्तर पर गणित पाठ्यचर्या में सुधार कर उसे समयानुकूल बनाने का वर्तमान प्रयास प्रयोक्ता समूहों से पुनर्निवेशन, ज्ञान की नवीन विचारधारा के आविर्भाव और राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) द्वारा विस्तृत चर्चा के उपरांत नवम्बर 2000 में प्रकाशित 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.) में दिए गए पाठ्यचर्या संबंधी विभिन्न सरोकारों पर आधारित एक प्रयास है।' इससे पहले 'पाठ्यचर्या रूपरेखा पर परिचर्चा दस्तावेज़ प्रारूप' तैयार किया गया जिस पर शिक्षक-प्रशिक्षकों, विभिन्न परीक्षा बोर्डों से नामित व्यक्तियों, शिक्षा निदेशालयों और विभिन्न राज्यों/संघ राज्य क्षेत्रों के राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों (एस.सी.ई.आर.टी.), के प्रतिनिधियों, सामान्य जन और विश्वविद्यालयों, महाविद्यालयों और परिषद् के संकाय सदस्यों द्वारा तैयार किए गए 'पाठ्यचर्या रूपरेखा पर परिचर्चा दस्तावेज़ प्रारूप' पर विभिन्न स्तरों पर चर्चा की गई।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा से माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण के संबंध में उभर कर आए कुछ सामान्य पाठ्यचर्या सरोकार इस प्रकार है :

- पाठ्यचर्या को सामाजिक परिवेश और व्यक्ति विशेष के जन्म से संबद्ध पूर्वाग्रहों को निष्प्रभावित करने तथा सार्वजनिक समभाव एवं समानता की जागरूकता का सृजन करने योग्य होना चाहिए।
- बालिका शिक्षा।
- पर्यावरण संरक्षण।
- स्वदेशीय ज्ञान और प्राचीन काल से अब तक विज्ञान और गणित में भारत के योगदान का समुचित समावेश।
- अप्रचलित और अनावश्यक विषयवस्तु को हटाकर पाठ्यचर्या के बोझ में कमी

तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित के शिक्षण के लिए आवश्यक ज्ञान एवं पृष्ठभूमि प्रदान करना।

उपरोक्त सरोकारों को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने माध्यमिक स्तर हेतु गणित की पाठ्यपुस्तक को विकसित करने के लिए एक लेखक दल गठित किया। दल ने पहले विभिन्न लेखकों द्वारा तैयार प्रारूप सामग्री को परस्पर चर्चा करके निरंतर संशोधित किया। इन चर्चाओं में प्रो. एस.के. श्रीवास्तव और विद्यालयों में विषयों को पढ़ाने वाले दो अध्यापकों श्री पी.डी. चतुर्वेदी और श्री सुरेन्द्र पी. सचदेवा की भी आवश्यकतानुसार सहायता ली गई। तत्पश्चात् इस सामग्री को एक समीक्षा कार्यशाला में शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विशेषज्ञों के समूह के समक्ष रखा गया। पाण्डुलिपि को अंतिम रूप प्रदान करते समय लेखकों द्वारा समीक्षा कार्यशाला के सुझावों और टिप्पणियों को आवश्यकतानुसार सम्मिलित किया गया।

इस पाठ्यपुस्तक के प्रमुख बिन्दु निम्नलिखित हैं :

- जहाँ तक संभव हो सका है, विद्यार्थियों को प्रत्येक विषय का परिचय उनके आसपास के परिवेश से संबंधित प्रेरक उदाहरणों के माध्यम से कराया गया है।
- पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्र, हल किए हुए उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए है। ऐसा सोच-समझकर किया गया है ताकि विद्यार्थी में अवधारणाओं को बेहतर ढंग से समझ कर प्रश्नों को बेहतर ढंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि की जा सके।
- गणितीय तथ्यों की (पुन:) खोज करने और आरेखण एवं मापन के लिए दक्षता के विकास हेतु अनेक क्रियाकलाप सुझाए गए हैं।
- राष्ट्रीय एकता, पर्यावरण संरक्षण, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति, छोटे परिवार के मानदंडों का अनुपालन करने, लिंग भेदभाव मिटाने के आवश्यकता पर जागरूकता विकसित करने के लिए कुछ शाब्दिक समस्याओं को सम्मिलित किया गया है। विद्यार्थियों के मस्तिष्क में इन शाब्दिक समस्याओं के प्रमुख संदेश पहुँचने चाहिए तथा शिक्षण के समय अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है।
- यथोचित स्थानों पर विभिन्न विषयों के ऐतिहासिक संदर्भों, विशेषकर भारतीय योगदानों का उल्लेख किया गया है।

मैं प्रो. जे.एस. राजपूत, निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् का धन्यवाद करता हूँ जिन्होंने पाठ्यचर्या नवीनीकरण की इस परियोजना का शुभारम्भ किया और गणित शिक्षा में सुधार हेतु इस राष्ट्रीय प्रयास में हमें सम्मिलित होने का अवसर प्रदान किया। मैं प्रो. आर.डी. शुक्ल, अध्यक्ष, विज्ञान और गणित शिक्षा विभाग को भी इस कार्य में सहयोग देने के लिए धन्यवाद देता हूँ। लेखक दल के सभी सदस्यों और समीक्षा कार्यशाला के सभी प्रतिभागी भी धन्यवाद के पात्र हैं।

इस पाठ्यपुस्तक का हिन्दी में अनुवाद प्रो. आशा रानी सिंगल, डा. नरेन्द्र मिश्रा और प्रो. एस.के. श्रीवास्तव ने किया है। हिन्दी पाण्डुलिपि का विषय सम्पादन प्रो. बी. देवकीनन्दन ने किया है। मैं इन सभी का आभारी हूँ।

किसी भी विषय पर कोई भी पुस्तक अंतिम नहीं हो सकती। हम यह समझते हैं कि पाठ्यपुस्तक में और अधिक सुधार हो सकता है। इस पाठ्यपुस्तक में सुधार हेतु सुझावों/टिप्पणियों का स्वागत है।

जी.पी. दीक्षित
अध्यक्ष
लेखक दल

पुस्तक के हिन्दी संस्करण की समीक्षा हेतु कार्यशाला के प्रतिभागी

प्रो. जी.पी. दीक्षित **(अध्यक्ष)**
विभागाध्यक्ष, गणित एवं खगोलिकी विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय
लखनऊ

श्री अशोक कुमार गुप्ता
सर्वोदय विद्यालय
जी.पी. ब्लॉक पीतमपुरा
दिल्ली

प्रो. आशा रानी सिंगल
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय
मेरठ

सुश्री जगमोहिनी
एस.सी.ई.आर.टी.
नई दिल्ली

प्रो. नरेन्द्र मिश्रा
एस.जे.एन. पी.जी. कॉलेज
लखनऊ

श्री पी.डी. चतुर्वेदी
केन्द्रीय विद्यालय
आर.के.पुरम सैक्टर-2
नई दिल्ली

श्री पी.के. तिवारी
फ्लैट न. 0-460,
जलवायु विहार, सैक्टर 30
गुडगांव

सुश्री पुष्पलता शर्मा
सर्वोदय विद्यालय
सैक्टर-6 आर.के.पुरम
नई दिल्ली

डा. आर.एस. गर्ग
केन्द्रीय विद्यालय
मुराद नगर

श्री रविन्द्र सिंह पनवार
एम.बी. देव उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
युसुफ सराय
नई दिल्ली

डा. रणवीर सिंह
एस.बी. विद्यालय नं. 1
सरोजनी नगर
नई दिल्ली

प्रो. एस.के. श्रीवास्तव
डा. हरी सिंह गौर विश्वविद्यालय
सागर

सुश्री सुनीता तलवार
सर्वोदय विद्यालय, मालवीय नगर
नई दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय

(विज्ञान एवं गणित विभाग)

1. डा. राम अवतार
2. श्री महेन्द्र शंकर
3. प्रो. बी. देवकीनन्दन **(समन्वयक)**

पाठ्यपुस्तक के विकास और समीक्षा हेतु कार्यशाला के प्रतिभागी

प्रो. जी.पी. दीक्षित **(अध्यक्ष)**
विभागाध्यक्ष, गणित एवं खगोलिकी विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

प्रो.आशा रानी सिंगल
ए-1, स्टाफ रैसिडैन्सस
चौधरी चरन सिंह यूनिवर्सिटी
मेरठ

श्री बी.एन. झा
सैनिक स्कूल कुन्जपुरा
करनाल

श्री बी.एस. अहलावत
सैनिक स्कूल
रीवा

श्री जी.डी.ढल
के-171, एल.आई.सी. कालोनी
नई दिल्ली

श्री एच.सी. पाठक
डी.एम. स्कूल (आर.आई.ई.)
अजमेर

डा. जे.डी. भारद्वाज
राजकीय उच्चतर मा. बाल विद्यालय नं. 1
किदवई नगर
नई दिल्ली

सुश्री झरना डे
देव समाज मॉडर्न स्कूल
नेहरू नगर
नई दिल्ली

श्री जे.एन. भोसले
जवाहर नवोदय विद्यालय
पल्स
सांगली

श्री एल.डी. कौशल
डी-735, सरस्वती विहार
दिल्ली

प्रो. मोहन लाल
अवैतनिक सचिव एवं सलाहकार
डी.ए.वी. कालेज प्रबंधक कमेटी
चित्रगुप्त मार्ग
नई दिल्ली

डा. नरेन्द्र मिश्रा
एस.जे.एन.पी.जी. कालेज
लखनऊ

सुश्री निर्मला गुप्ता
अवर लेडी ऑफ फातिमा कॉन्वेन्ट
माध्यमिक स्कूल
गुडगांव

सुश्री जगमोहिनी
एस.सी.ई.आर.टी.
नई दिल्ली

श्री पी.डी. चतुर्वेदी
केन्द्रीय विद्यालय
आर.के.पुरम, सैक्टर-2
नई दिल्ली

श्री पी.के. तिवारी
फ्लैट नं. 0-460
जलवायु विहार, सैक्टर-30
गुडगांव

सुश्री पुष्पलता शर्मा
सर्वोदय विद्यालय
सैक्टर 6, आर.के.पुरम
नई दिल्ली

श्री रवीन्द्र सिंह पनवार
एम.बी. डी.ए.वी. उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
युसुफ सराय
नई दिल्ली

श्री शंकर मिश्रा
डी.एम. स्कूल (आर.आई.ई.)
भुवनेश्वर

प्रो. एस.के. श्रीवास्तव
प्रीति निकुंज, सिविल लाइन्स
सागर

श्री श्रीकांत तिवारी
उच्चतर माध्यमिक विद्यालय सागर
मंडला

श्री एस.पी. सचदेवा
दिल्ली पब्लिक स्कूल
वसंत कुंज
नई दिल्ली

सुश्री सुनीता तुलसानी
सेंट जोसफ कॉन्वेन्ट सीनियर सैकेन्डरी स्कूल
जबलपुर कैंट

डा. वी.पी. कटारिया
8 ए, सिंधी कालोनी
सिविल लाइन्स
सागर

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
(विज्ञान एवं गणित विभाग)

प्रो. हुकुम सिंह

श्री महेन्द्र शंकर

डा. राम अवतार

डा. वी.पी. सिंह

प्रो.बी. देवकीनन्दन **(समन्वयक)**

विषय सूची

अध्याय 1

अपरिमेय संख्याएँ

1.1 भूमिका

हम जानते हैं कि एक परिमेय संख्या ऐसी संख्या को कहते हैं जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके जहाँ कि p तथा q दोनों पूर्णांक हों और $q \neq 0$ हो। यदि q प्राकृत संख्या हो और p तथा q में 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, तो हम कहते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ अपने न्यूनतम पदों में है। उदाहरणत: परिमेय संख्या $\frac{3}{4}$ अपने न्यूनतम पदों में है किन्तु $\frac{12}{16}$ अपने न्यूनतम पदों में नहीं है।

परिमेय संख्या धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकती है। याद कीजिए कि पूर्णांक n भी एक परिमेय संख्या है क्योंकि इसे $\frac{n}{1}$ के रूप में देखा जा सकता है। सभी भिन्नों की भाँति परिमेय संख्याओं को भी दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। आइए $\frac{5}{16}$ को दशमलव के रूप में व्यक्त करें ।

```
16)5.0(0.3125
   48
    20
    16
     40
     32
      80
      80
       0
```

इस भाँति $\frac{5}{16} = 0.3125$ । क्योंकि $\frac{5}{16}$ के दशमलव प्रसार का (परिमित पदों में) अंत हो जाता है, अतः $\frac{5}{16}$ के दशमलव रूप को हम *सांत* (terminating) कहते हैं।

इसी प्रकार,

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{7}{5} = 1.4,\ \frac{-7}{64} = -0.109375,\ \frac{637}{250} = 2.548$$ आदि

ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं जिन्हें सांत दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। आइए, अब $\frac{33}{26}$ को दशमलव रूप में व्यक्त करें । हम देखते हैं कि

```
26)33(1.2692307...
   26
    70
    52
    180        ▶ A
    156
     240
     234
       60
       52
        80
        78
        200
        182
         180    ----▶ B
```

ऊपर के विभाजन में स्थितियों A तथा B पर ध्यान दीजिए। स्थिति B में शेषफल वही है जो स्थिति A में है। अतः जब 26 से भाग देने की क्रिया को B से आगे बढ़ाएँगे तो भागफल में अंकसमूह 6,9,2,3,0,7 की पुनरावृत्ति होगी। इस प्रकार,

$$\frac{33}{26} = 1.2692307\ 692307...$$

इस दशा में विभाजन *अनवसानी* है। अतः ऐसे दशमलव प्रसारों को *अनवसानी आवर्ती* (non-terminating repeating) या अनवसानी पुनरावर्ती (non-terminating recurring) कहते हैं। अभी तक हमने जो परिमेय संख्याएँ देखीं उनके दशमलव प्रसार या तो सांत

हैं या अनवसानी आवर्ती। क्या किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हो सकता है? नहीं। क्योंकि उत्तरोत्तर शेषफल भाजक से छोटे होते हैं, अतः एक स्थिति आती है जब शेषफल की आवृत्ति होती है। यहाँ से भागफल में अंकों की पुनरावृत्ति होने लगती है।

इसी प्रकार

$\frac{10}{3} = 3.3333, \cdots, \frac{3}{11} = 0.272727...,$ और $\frac{6}{7} = 0.857142857142...$ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं जिन्हें अनवसानी आवर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैसा ऊपर देखा गया, प्रत्येक दशा में भागफल में अंकों के एक समूह की पुनरावृत्ति होती है। $\frac{10}{3}$ के लिए आवर्ती समूह में एक अंक '3' है। $\frac{3}{11}$ के लिए आवर्ती समूह 27 है। $\frac{6}{7}$ के लिए आवर्ती समूह क्या है?

इस प्रकार ऊपर के सभी दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती (या पुनरावर्ती) हैं। बहुधा आवर्ती दशमलव में बारम्बार आने वाले अंक-समूह की प्रथम आवृत्ति के अंकों के ऊपर एक रेखाखंड खींच दिया जाता है और शेष आवृत्तियों को लुप्त कर दिया जाता है। उदाहरणत:

$$\frac{33}{26} = 1.2\overline{692307}, \frac{10}{3} = 3.\overline{3}, \frac{3}{11} = 0.\overline{27}, \frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

कभी-कभी रेखाखंड के स्थान पर दोहराए जा रहे अंक-समूह के प्रथम और अंतिम अंक के ऊपर एक-एक बिंदु लगा दिया जाता है जैसा कि $\frac{6}{7}$ को हम $0.\dot{8}5714\dot{2}$ लिखते हैं। तात्पर्य यह कि 8 से 2 तक, छः के छः अंकों (857142) का समूह बारम्बार दोहराया जा रहा है।

विलोमत: क्या प्रत्येक सांत अथवा पुनरावर्ती दशमलव प्रसार को हम परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं? आइए, उदाहरणों की सहायता से इस प्रश्न का उत्तर खोजें।

(i) $0.25 = \frac{25}{100}$

$= \frac{1}{4}$

(ii) $0.54 = \frac{54}{100}$

$= \frac{27}{50}$

(iii) 0.333...

माना कि $x = 0.3333...$

तब $10x = 3.3333...$

या $10x - x = (3.3333...) - (0.3333...)$

या $9x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

अत: $0.3333... = \frac{1}{3}$

(iv) 0.18181818

माना कि $x = 0.18181818...$

या $100x = 18.18181818...$

या $100x - x = 18$

या $99x = 18$

$\therefore x = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

अत: $0.18181818... = \frac{2}{11}$

इस प्रकार प्रत्येक परिमेय संख्या को सांत अथवा पुनरावर्ती दशमलव के रूप में लिखा जा सकता है। विलोमत: प्रत्येक सांत अथवा पुनरावर्ती दशमलव को परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है।

क्या सांत, अथवा अनवसानी परंतु पुनरावर्ती, दशमलवों के अतिरिक्त अन्य प्रकार के दशमलव प्रसार भी हो सकते हैं? नीचे लिखे दशमलव को ध्यान से देखिए:

$$0.101001000100001... \qquad (1)$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर (1) में दशमलव बिंदु की दाईं ओर या तो 0 हैं या 1 हैं। 1 के अंकों के मध्य क्रमशः एक शून्य, दो शून्य, तीन शून्य, और इसी प्रकार आगे भी, आते हैं। इस प्रकार 1 के दो उत्तरोत्तर अंकों को पृथक करने वाले शून्यों की संख्या क्रमशः एक से बढ़ती चली जाती है।

स्पष्ट है कि ऊपर वाले दशमलव को हम अनवसानी रूप से लिखते चले जा सकते हैं। यह दशमलव स्पष्टत: *अनवसानी* है। क्या यह पुनरावर्ती है? ध्यान दीजिए कि कोई भी अंक-समूह यहाँ बारम्बार नहीं आता। अत: यह *अनावर्ती* है। अनवसानी,

अनावर्ती दशमलव संख्याओं की कोई कमी नहीं है। वास्तव में ऊपर (1) में दी गई संख्या में आप अंक 1 के स्थान पर इच्छानुसार कोई भी अन्य प्राकृत संख्या (कितने ही अंकों वाली) लिखकर एक ऐसी संख्या बना सकते हैं। चूँकि प्राकृत संख्याओं की संख्या अपरिमित है आप अपरिमित अनावर्ती, अनवसानी दशमलव संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं। क्योकि ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार अनावर्ती और अनवसानी हैं, ये संख्याएँ परिमेय नहीं हो सकतीं।

अत: हमारे लिए आवश्यक हो जाता है कि परिमेय संख्याओं के निकाय का विस्तार करें। जैसा कि हमने ऊपर देखा, किसी संख्या का दशमलव प्रसार इस रूप में हो सकता है:

(1) सांत

(2) अनवसानी किन्तु आवर्ती

(3) अनवसानी और अनावर्ती

याद कीजिए कि रूप (1) और (2) वाली संख्याएँ परिमेय होती हैं । रूप (3) वाली संख्याएँ जो परिमेय नहीं हैं, *अपरिमेय* (irrational) *संख्याएँ* कहलाती हैं ।

निष्कर्ष यह हुआ कि

1. *परिमेय संख्या या तो सांत दशमलव होती है और या फिर अनवसानी किंतु पुनरावर्ती दशमलव।*

2. *अपरिमेय संख्या अनवसानी और अनावर्ती दशमलव होती है। इसे* $\frac{p}{q}$ *के रूप में नहीं लिखा जा सकता जहाँ कि* p *और* q *पूर्णांक हों तथा* $q \neq 0$ *हो।*

परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर वास्तविक संख्याएँ कहते हैं। इस प्रकार प्रत्येक वास्तविक संख्या या तो परिमेय संख्या होती है और या फिर अपरिमेय संख्या। तात्पर्य यह है कि यदि कोई वास्तविक संख्या परिमेय न हो तो फिर वह अवश्य ही अपरिमेय संख्या होती है। परिमेय संख्याओं के योग, व्यवकलन, गुणा, भाग आदि संक्रियाओं के नियम वास्तविक संख्याओं पर भी लागू हैं।

आइए, देखें कि $\sqrt{2}$ जैसी संख्याएँ परिमेय होती हैं या अपरिमेय। आइए 2 का वर्गमूल भाजन विधि से निकालें।

	1.4142135...
1	2.$\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17641775

अर्थात् $\sqrt{2}$ = 1.4142135...

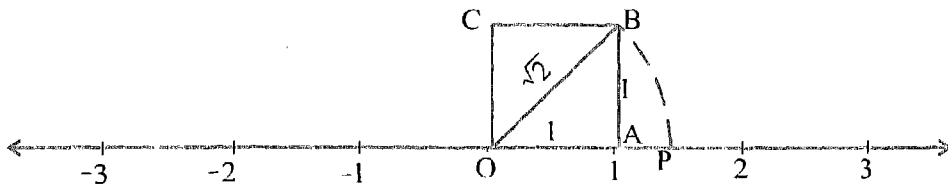
आप चाहें तो इस प्रसार में आगे के कुछ और अंक निकालें। आप देखेंगे कि यह क्रम न तो समाप्त ही होगा और न ही दोहराएगा। अतः $\sqrt{2}$ का दशमलव प्रसार अनवसानी और अनावर्ती है। जैसा ऊपर देखा, यह प्रसार 1.4142135... है।

इसी प्रकार $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ आदि भी अनवसानी और अनावर्ती दशमलव हैं। अतः ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

1.2 वास्तविक संख्या रेखा

हम जानते हैं कि संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण कैसे किया जाता है। क्या संख्या रेखा पर कुछ ऐसे बिन्दु हैं जो किसी भी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करते? हमारा दावा है कि ऐसे अनेकानेक बिन्दु हैं। हम एक ऐसे बिन्दु को खोजने

का प्रयास करेंगे ।

आकृति 1.1 में दिखाए अनुसार एक संख्या रेखा खींचते हैं ।

आकृति 1.1

आकृति 1.1 में दिखाए अनुसार एक इकाई लम्बाई OA पर एक वर्ग OABC लेते हैं। OB इसका एक विकर्ण है। पाइथागोरस प्रमेय से

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$$

O को केंद्र और OB को त्रिज्या लेते हुए एक चाप खींचते हैं जो संख्या रेखा को P पर काटता है (देखिए आकृति 1.1)। स्पष्टत: $OP = OB = \sqrt{2}$ । इस प्रकार बिंदु P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ को निरूपित करता है और $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है । इस प्रकार हमने संख्या रेखा पर एक ऐसा बिंदु पा लिया है जो किसी भी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करता है। यह तथ्य कि, संख्या रेखा पर $\sqrt{3}, \sqrt{5},$ जैसे अन्य बिंदु भी हैं, जो किसी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करते हैं, इस भाँति दिखाया जा सकता है।

वर्ग OABC के विकर्ण OB पर एक समकोण त्रिभुज OBD बनाते हैं जिसमें B समकोण है और BD = OA (एक इकाई लम्बाई)। देखिए आकृति 1.2 को। पुन: पाइथागोरस प्रमेय से

$$OD = \sqrt{OB^2 + BD^2} = \sqrt{3}$$

O को केंद्र और OD को त्रिज्या लेकर संख्या रेखा को Q पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। स्पष्टत: $OQ = OD = \sqrt{3}$ । इस प्रकार Q संख्या रेखा पर संख्या $\sqrt{3}$ को निरूपित करता है।

आकृति 1.2

यदि हम इस प्रक्रम को चालू रखें तो हमें संख्या रेखा पर और संख्याएँ जैसे $\sqrt{4}, \sqrt{5} \ldots$ को निरूपित करने वाले बिंदु प्राप्त होते जाएँगे। [नोट कीजिए हमें कुछ बिन्दु जो परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं, जैसे $\sqrt{4}$ भी प्राप्त होते हैं।] क्योंकि जिस संख्या रेखा पर आप अब तक पूर्णांक निरूपित करते आए हैं उसी पर समस्त परिमेय तथा अपरिमेय अर्थात् वास्तविक संख्याएँ भी निरूपित की जा सकती हैं, अत: इस संख्या रेखा को *वास्तविक संख्या रेखा* (real number line) भी कहते हैं।

इस तथ्य पर ध्यान दीजिए कि अपरिमेय संख्याएँ अनन्त हैं। जो संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं, उन सबके वर्गमूल अपरिमेय संख्याएँ हैं, जो संख्याएँ पूर्ण घन नहीं हैं उन सबके घनमूल भी अपरिमेय हैं, ऐसे ही आगे भी। इन सब संख्याओं के अतिरिक्त इनसे भी अधिक और अपरिमेय संख्याएँ हैं। उदाहरण के लिए, इनमें से एक सुप्रसिद्ध संख्या है π जो प्रत्येक वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात है। यह अनुपात एक अचर संख्या है, वृत्त की त्रिज्या चाहे कुछ भी क्यों न हो।

हम देख चुके हैं कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है। अब हम तर्क से इस बात को सिद्ध करेंगे कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

माना कि $\sqrt{2}$ परिमेय है । अत: $\sqrt{2}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ कि p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$। यह भी माना कि $\frac{p}{q}$ अपने न्यूनतम पदों में है। अब

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

अत: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ (दोनों पक्षों का वर्ग लेने पर)

या $p^2 = 2q^2$ (दोनों पक्षों में धन पूर्णांक q^2 से गुणा करने पर) (1)

क्योंकि p^2 का गुणनखंड 2 है, अत: p^2 एक सम पूर्णांक हुई। हमारा दावा है कि p भी एक सम पूर्णांक है।

यदि p सम पूर्णांक नहीं है, तो फिर यह विषम पूर्णांक होगी। माना कि

$p = 2m + 1$ जहाँ m कोई पूर्णांक है।

$p^2 = (2m + 1)^2$

$= 4m^2 + 4m + 1$, जो एक विषम पूर्णांक है,

क्योंकि $4m^2$ तथा $4m$ दोनों ही सम हैं। किंतु p^2 एक सम संख्या है। अत: अंतर्विरोध हुआ। इसलिए p एक सम पूर्णांक है। मान लीजिए कि $p = 2r$, जहाँ r एक पूर्णांक है।

अब (1) से

$(2r)^2 = 2q^2$

या $4r^2 = 2q^2$

या $q^2 = 2r^2$

अत: q^2 एक सम पूर्णांक है। ऊपर सिद्ध किए अनुसार q भी एक सम पूर्णांक है। इस प्रकार p और q दोनों ही सम पूर्णांक हैं। अत: 2 इन दोनों पूर्णांकों को विभाजित करता है। किंतु यह इस कल्पना के विपरीत है कि p और q का कोई उभयनिष्ठ भाजक नहीं है। इस अंतर्विरोध से सिद्ध होता है कि $\sqrt{2}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। अत: $\sqrt{2}$ परिमेय नहीं है।

नीचे लिखे तथ्यों पर ध्यान दीजिए :

(i) एक परिमेय एवं एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर, दोनों सदा अपरिमेय होते हैं।

(ii) एक शून्येतर परिमेय एवं एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

(iii) दो अपरिमेय संख्याओं के योग, अंतर, गुणनफल या भागफल, इन सबका अपरिमेय होना आवश्यक नहीं जैसा कि नीचे दिए गए उदाहरणों से ज्ञात होता है।

उदाहरण 1 : दो ऐसी अपरिमेय संख्याओं का उदाहरण दीजिए जिनका योग

(i) परिमेय हो। (ii) अपरिमेय हो।

हल :(i) अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}$ तथा $-\sqrt{2}$ का योग 0 है जो एक परिमेय संख्या है।

(ii) अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ का योग $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ है जो एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 2 : दो ऐसी अपरिमेय संख्याओं का उदाहरण दीजिए जिनका गुणनफल एक

(i) परिमेय संख्या हो। (ii) अपरिमेय संख्या हो।

हल :(i) $\sqrt{27}$ और $\sqrt{3}$ का गुणनफल 9 है, जो एक परिमेय संख्या है।

(ii) $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ का गुणनफल $\sqrt{6}$ है जो एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरणों 1 और 2 से यह स्पष्ट हो जाता है कि दो अपरिमेय संख्याओं के योग या इनके गुणनफल का अपरिमेय होना आवश्यक नहीं है। दो अपरिमेय संख्याओं का योग या गुणनफल परिमेय भी हो सकता है।

उदाहरण 3: $\sqrt{18}$ की पहचान परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या के रूप में कीजिए।

हल : $\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$

अब 3 एक परिमेय संख्या है किंतु $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। गुणनफल $3\sqrt{2}$ अपरिमेय है। ध्यान दीजिए कि एक शून्येतर परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल अपरिमेय होता है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नालिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए :

(i) $\frac{42}{100}$ (ii) $\frac{327}{500}$ (iii) $3\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{1}{5}$

(v) $\frac{5}{6}$ (vi) $\frac{1}{7}$ (vii) $\frac{2}{13}$ (viii) $\frac{11}{17}$

2. 2 और 3 के बीच एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए। इनके बीच कितनी परिमेय तथा कितनी अपरिमेय संख्याएँ हैं?

3. निम्नलिखित रिक्त स्थान को पूर्ण कीजिए :
   (i) संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक ....संख्या को निरूपित करता है जो या तो ....होती है या...................।
   (ii) अपरिमेय संख्या का दशमलव रूप न तो .... होता है और न ही ....।
   (iii) परिमेय संख्या $\frac{8}{27}$ का दशमलव रूप .... है।
   (iv) 0 एक .... संख्या है। (संकेत : परिमेय/अपरिमेय)

4. दो ऐसी अपरिमेय संख्याओं का उदाहरण दीजिए जिनका
   (i) अंतर एक परिमेय संख्या हो।
   (ii) अंतर एक अपरिमेय संख्या हो।
   (iii) योग एक परिमेय संख्या हो।
   (iv) योग एक अपरिमेय संख्या हो।
   (v) गुणनफल एक परिमेय संख्या हो।
   (vi) गुणनफल एक अपरिमेय संख्या हो।
   (vii) भागफल एक परिमेय संख्या हो।
   (viii) भागफल एक अपरिमेय संख्या हो।

5. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए :
   (i) 0.6666... (ii) 0.272727...
   (iii) 3.7777... (iv) 18.484848...

6. निम्नलिखित संख्याओं की पहचान परिमेय अथवा अपरिमेय संख्याओं के रूप में कीजिए। परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण भी दीजिए।

   (i) $\sqrt{4}$ (ii) $3\sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{1.44}$

   (iv) $\sqrt{\frac{9}{27}}$ (v) $-\sqrt{.64}$ (vi) $\sqrt{100}$

7. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित समीकरणों में चरों x, y, z आदि में कौन-कौन से परिमेय, या कौन-कौन से अपरिमेय संख्याओं को निरूपित करते हैं :

   (i) $x^2 = 5$ (ii) $y^2 = 9$ (iii) $z^2 = .04$ (iv) $u^2 = \frac{17}{4}$

   (v) $v^2 = 3$ (vi) $w^3 = 27$ (vii) $t^2 = 0.4$

8. एक उदाहरण दीजिए जहाँ एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल कोई परिमेय संख्या हो।

1.3 करणी

आप पढ़ चुके हैं कि

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{21}\ldots$$

आदि जैसी संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं। वास्तव में ये एक विशेष प्रकार की अपरिमेय संख्याएँ हैं। ये ऐसी परिमेय संख्याओं के वर्गमूल हैं जो किसी परिमेय संख्या के वर्ग नहीं हैं। इसी प्रकार $\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}$, आदि ऐसी परिमेय संख्याओं के घनमूल हैं जो किसी परिमेय संख्या के घन नहीं हैं। ऐसी अपरिमेय संख्याओं को *करणी* (surds या radicals) कहते हैं। आइए समझें कि व्यापक रूप में करणी किसे कहते हैं।

ऐसी परिमेय संख्या a लीजिए जिसे परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के n वें घात के रूप में लिखा जा सके।

तब $$a = \left(\frac{p}{q}\right)^n$$

या $$\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$$

अर्थात् $\sqrt[n]{a}$ एक परिमेय संख्या है। विलोमत:, यदि $\sqrt[n]{a}$ कोई परिमेय संख्या हो तो किन्हीं पूर्णांकों $p, q (\neq 0)$ के लिए

$$\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$$

या $$a = \left(\frac{p}{q}\right)^n$$ जो एक परिमेय संख्या का n वाँ घात है।

फलत: $\sqrt[n]{a}$ तब और केवल तब ही परिमेय होता है जब a को किसी परिमेय संख्या के n वें घात के रूप में लिखा जा सके। इससे स्पष्ट हो जाता है कि यदि कोई धनात्मक संख्या a किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का n वाँ घात न हो तो $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होती है। ऐसी दशा में a का यह धनात्मक n वाँ मूल ($\sqrt[n]{a}$) जो कि एक अपरिमेय संख्या है, *करणी* कहलाता है। इस प्रकार जब

(i) a धनात्मक परिमेय संख्या हो, और

(ii) $\sqrt[n]{a}$ अपरिमेय संख्या हो

तब हम कहते हैं कि "$\sqrt[n]{a}$ करणी है"।

करणियों को सरल करने के लिए हम बिना उपपत्ति के कुछ नियम बता रहे हैं। इनमें a तथा b धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

(I) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

(II) $\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}\right) = \sqrt[n]{ab}$

(III) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

उदाहरण 4 : सकारण बताइए कि निम्नलिखित में से कौन सी करणी हैं और कौन सी करणी नहीं हैं :

(i) $\sqrt{64}$ (ii) $\sqrt{45}$

(iii) $\sqrt{20} \times \sqrt{45}$ (iv) $8\sqrt{10} \div 4\sqrt{15}$

(v) $3\sqrt{12} \div 6\sqrt{27}$ (vi) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$

हल : (i) $\sqrt{64}$

$\because \sqrt{64} = 8$ और 8 एक परिमेय संख्या है, अतः $\sqrt{64}$ करणी नहीं है।

(ii) $\sqrt{45}$

$$\because \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$$ [नियम (II)]

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

अतः $\sqrt{45}$ करणी है।

(iii) यहाँ $\sqrt{20} \times \sqrt{45} = \sqrt{900}$ [नियम (II)]

$$= \sqrt{30 \times 30}$$

$$= (\sqrt{30})^2$$

$$= 30$$ [नियम (I)]

क्योंकि 30 एक परिमेय संख्या है, अतः $\sqrt{20} \times \sqrt{45}$ करणी नहीं है।

(iv) यहाँ $8\sqrt{10} \div 4\sqrt{15} = \dfrac{8\sqrt{10}}{4\sqrt{15}}$

$$= \frac{(\sqrt{8})^2(\sqrt{10})}{(\sqrt{4})^2(\sqrt{15})}$$ [नियम (I)]

$$= \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10}}{\sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{15}}$$

$$= \frac{\sqrt{8 \times 8 \times 10}}{\sqrt{4 \times 4 \times 15}}$$ [नियम (II)]

$$= \frac{\sqrt{640}}{\sqrt{240}}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}}$$ [नियम (III)]

जो एक अपरिमेय संख्या है।

क्योंकि $\frac{8}{3}$ किसी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है, अतः $8\sqrt{10} \div 4\sqrt{15}$ करणी है।

(v) $3\sqrt{12} \div 6\sqrt{27} = \frac{3\sqrt{12}}{6\sqrt{27}} = \frac{(\sqrt{3})^2(\sqrt{12})}{(\sqrt{6})^2\sqrt{27}}$ [नियम (I)]

$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{12}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt{27}}$

$= \frac{\sqrt{3\times3\times12}}{\sqrt{6\times6\times27}}$ [नियम (II)]

$= \sqrt{\frac{108}{972}}$ [नियम (III)]

$= \sqrt{\frac{1}{9}}$

$= \frac{1}{3}$

चूँकि $\frac{1}{3}$ परिमेय संख्या है, अतः $3\sqrt{12} \div 6\sqrt{27}$ करणी नहीं है।

(vi) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5\times25}$ [नियम (II)]

$= \sqrt[3]{5\times5\times5}$

$= \sqrt[3]{5^3}$

$= 5$ [नियम (I)]

अतः दी हुई संख्या करणी नहीं है।

प्रश्नावली 1.2

1. सकारण बताइए कि निम्नलिखित में से कौन सी करणियाँ हैं और कौन सी नहीं हैं :

(i) $\sqrt{5}\times\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{8}\times\sqrt{6}$ (iii) $\sqrt{27}\times\sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{16}\times\sqrt{4}$ (v) $5\sqrt{8}\times2\sqrt{6}$ (vi) $\sqrt{125}\times\sqrt{5}$

(vii) $\sqrt{100}\times\sqrt{2}$ (viii) $6\sqrt{2}\times9\sqrt{3}$ (ix) $\sqrt{120}\times\sqrt{45}$

(x) $\sqrt{15}\times\sqrt{6}$

1.4 करणियों का सरलीकरण

यदि किसी व्यंजक के हर में कोई करणी हो तो इसे एक परिमेय हर वाले तुल्य व्यंजक में बदला जा सकता है। यह प्रक्रम *हर का परिमेयकरण* (rationalization of the denominator) कहलाता है।

करणियों को सरल करने के लिए हर का परिमेयकरण किया जाता है । इस प्रक्रम को उदाहरणों की सहायता से समझाया जाएगा ।

उदाहरण 5 : $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ को परिमेय हर वाले तुल्य व्यंजक में परिवर्तित कीजिए।

हल : यहाँ हर में करणी $3\sqrt{3}$ है। अत: $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ के अंश और हर दोनों को $\sqrt{3}$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5\times 3}}{3\times(\sqrt{3})^2} \qquad \text{[नियम (II)]}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3\times 3} \qquad \text{[नियम (I)]}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{9}$$

टिप्पणी : किसी करणी युक्त व्यंजक के सरलीकरण हेतु उसके हर को पूर्णांक में परिवर्तित कर देते हैं।

याद कीजिए कि $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ होता है। अत: यदि किसी व्यंजक का हर $a+\sqrt{b}$ के रूप वाला हो तो इसका परिमेयकरण करने के लिए इसके अंश और हर दोनों को $a-\sqrt{b}$ से गुणा कर देते हैं। इसी प्रकार यदि हर $a-\sqrt{b}$ के रूप में हो तो अंश और हर, दोनों को $a+\sqrt{b}$ से गुणा कर देते हैं। ऐसा करने से हमें

हर में व्यंजक $(a+\sqrt{b})\ (a-\sqrt{b}) = a^2-b$ प्राप्त होता है और हर एक परिमेय संख्या बन जाती है।

$a+\sqrt{b}$ को $a-\sqrt{b}$ का *संयुग्मी* (conjugate) कहते हैं, और $a-\sqrt{b}$ को $a+\sqrt{b}$ *का संयुग्मी* कहते हैं। इस विधि को उदाहरणों द्वारा समझाएँगे।

उदाहरण 6 : $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ को सरल कीजिए।

हल : यहाँ हर $\sqrt{3}+1$ है । अतः अंश और हर, दोनों को उसके संयुग्मी $\sqrt{3}-1$ से गुणा करने पर हम पाते हैं

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2}$$

$$= \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 7 : यदि $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=a+b\sqrt{5}$, तो a तथा b का मान निकालिए।

हल : यहाँ $$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}+\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}+\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(5+1-2\sqrt{5}\right)+\left(5+1+2\sqrt{5}\right)\right]$$

$$= 3+0\sqrt{5}$$

$$\therefore 3+0\sqrt{5} = a+b\sqrt{5}$$

अत: $a = 3$ और $b = 0$

टिप्पणी : यदि कोई व्यंजक दो या दो से अधिक ऐसे व्यंजकों के योग/अंतर से बना हो जिनमें योग/अंतर किए जा रहे घटक व्यंजकों में करणियाँ आ रही हों तो प्रत्येक घटक व्यंजक को अलग-अलग सरल कर लिया जाता है।

उदाहरण 8 : $\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$ को परिमेय हर वाले तुल्य व्यंजक में बदलिए।

हल : दिए हुए व्यंजक के अंश और हर, दोनों को $4+3\sqrt{5}$ से गुणा करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = \frac{(4+3\sqrt{5})}{(4-3\sqrt{5})} \times \frac{(4+3\sqrt{5})}{(4+3\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\left(4+3\sqrt{5}\right)^2}{4^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{16+45+24\sqrt{5}}{16-45}$$

$$= \frac{61+24\sqrt{5}}{-29}$$

उदाहरण 9 : $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ को सरल कीजिए ।

हल : $$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{[(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}]\,[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}$$ [अंश और हर, दोनों को $(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}$ से गुणा करने पर।

$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(1+2+2\sqrt{2}\right)-3}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$ [अंश और हर, दोनों को $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर।

$$= \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}[\sqrt{2}+2+\sqrt{6}]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित प्रत्येक समिका में a और b के मान निकालिए :

(i) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=a+b\sqrt{3}$ (ii) $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$ (iii) $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$

(iv) $\frac{5+\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}=a+b\sqrt{6}$ (v) $\frac{3+\sqrt{7}}{3-4\sqrt{7}}=a+b\sqrt{7}$

2. यदि $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}-\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}=a+b\sqrt{7}$, तो a तथा b के मान निकालिए।

3. हर का परिमेयकरण कर, निम्नलिखित में प्रत्येक को सरल कीजिए :

(i) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

(iii) $\frac{30}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$

(v) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{9+2\sqrt{14}}$ (vi) $\frac{3}{5-\sqrt{3}}+\frac{2}{5+\sqrt{3}}$

(vii) $\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}+\frac{4-\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}$ (viii) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$

(ix) $\frac{4}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ (x) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

अध्याय 2

बहुपद

2.1 भूमिका

इस अध्याय में हम बीजगणित (Algebra) कहे जाने वाले विषय से सम्बन्धित कुछ संकल्पनाएँ सीखेंगे। बीजगणित गणित की एक महत्वपूर्ण शाखा है। इसे गणित की आशुलिपि (short-hand) कहा जाता है। बीजगणित इसलिए बहुत अधिक उपयोगी है क्योंकि यहाँ हम अंकगणित की भाँति संख्याओं का प्रयोग करने के स्थान पर *संकेतों/प्रतीकों* (symbols) को काम में लाते हैं जो अज्ञात राशियों के लिए प्रयोग किए जाते हैं। प्रतीकों के प्रयोग से हमें हर तरह की व्यावहारिक समस्याओं को हल करने में सहायता मिलती है। उदाहरणत: जब हम किसी रैखिक समीकरण $ax = b$ अथवा $ax - b = 0$ को हल करते हैं, तो हमें किसी एक विशेष समीकरण के हल के स्थान पर *समस्त* सम्भव रैखिक समीकरणों का हल मिल जाता है। इस अर्थ में यह व्यापकीकृत अंकगणित हुआ।

बीजगणित के लिए अँग्रेजी शब्द (Algebra) एक पुस्तक के नाम *किताब अल-मुहतसर फी हिसाब अल-जब्र वल-मुकाबला* (Kitab al-muhtasar fi hisab Al-gabr wal-muqabalah) में से आया है। इसे बगदाद में रहने वाले मोहम्मद इब्न मूसा अबू अब्दुल्ला अल-ख्वारिज्मी (Mohammed ibn Musa abu Abdullah al-Khowarizmi) ने सन् 825 के आस-पास लिखा था, किंतु आर्यभट्ट और ब्रह्मगुप्त जैसे भारतीय गणितज्ञों ने इससे बहुत पहले ही इस क्षेत्र में बहुत सा काम किया था। बाद के भारतीय गणितज्ञों जैसे कि महावीर, श्रीधर और भास्कर II ने भी इस विषय में महत्त्वपूर्ण योगदान किए।

आप एक चर वाले बहुपदों से परिचित हैं। इस अध्याय में हम बहुपदों का विस्तार से अध्ययन करेंगे। हम कुछ विशेष रूप वाले बहुपदों के गुणनखंड करना सीखेंगे।

हम *शेषफल* और *गुणनखंड* प्रमेय कहलाने वाले दो महत्वपूर्ण परिणाम भी सीखेंगे। आप इन प्रमेयों का प्रयोग आगे की कक्षाओं में भी करते रहेंगे।

2.2 बहुपदों का गुणनखंडन : समीक्षा

आप जानते हैं कि दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजकों (algebraic expressions) को गुणा कर एक नया बीजीय व्यंजक कैसे प्राप्त किया जाता है। सरल दशाओं में आपने इसकी विलोम क्रिया भी सीखी हुई है। अर्थात, दिए हुए बीजीय व्यंजक से वे सरल व्यंजक निकालना जिनका गुणनफल यह दिया हुआ बीजीय व्यंजक हो। जैसा कि आप जानते हैं इस विलोम क्रिया को दिए हुए बीजीय व्यंजक का *गुणनखंडन* (factorisation) करना कहते हैं। जो सरल व्यंजक इस क्रिया से प्राप्त होते हैं, वे दिए हुए बीजीय व्यंजक के *गुणनखंड* (factors) कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, क्योंकि $(a + b)$ और $(a - b)$ का गुणनफल $a^2 - b^2$ है, अत:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad (1)$$

इस प्रकार, जब हम $(a^2 - b^2)$ का गुणनखंडन करते हैं, तो हमें गुणनखंड $a + b$ और $a - b$ प्राप्त होते हैं। फलत: ऊपर के सम्बन्ध (1) को दो प्रकार से देखा जा सकता है :

1. $a^2 - b^2$, $(a + b)$ और $(a - b)$ का गुणनफल है।
2. $(a + b)$ और $(a - b)$, $a^2 - b^2$ के गुणनखंड हैं।

टिप्पणी : इस पूरे अध्याय में पद *व्यंजक* से हमारा तात्पर्य *बीजीय व्यंजक* से होगा।

याद कीजिए कि अभी तक हमने दिए हुए बीजीय व्यंजक के गुणनखंडन के लिए निम्नलिखित विधियों का प्रयोग किया है :

1. *दो अथवा अधिक पदों में से एक सार्व (common) गुणनखंड निकालना*
2. *पदों के किसी समूह में से एक सार्व गुणनखंड निकालना [समूहन विधि (Grouping Method)]*

उदाहरण 1 : गुणनखंडन कीजिए :

(a) $2x^2y + 6xy^2 + 10x^2y^2$

(b) $2x^4 + 2x^3y + 3xy^2 + 3y^3$

हल : (a) $2x^2y + 6xy^2 + 10x^2y^2 = (2xy)(x + 3y + 5xy)$

(b) $2x^4 + 2x^3y + 3xy^2 + 3y^3 = (2x^4 + 2x^3y) + (3xy^2 + 3y^3)$

$= 2x^3(x + y) + 3y^2(x + y)$

$= (2x^3 + 3y^2)(x + y)$

टिप्पणी : कभी-कभी पदों का समूहन भिन्न-भिन्न प्रकार से किया जा सकता है। उदाहरणत: हम समूहन इस भाँति भी कर सकते थे :

$2x^4 + 2x^3y + 3xy^2 + 3y^3 = (2x^4 + 3xy^2) + (2x^3y + 3y^3)$ (पहले-तीसरे तथा दूसरे-चौथे पदों को समूहित कर)

$= x(2x^3 + 3y^2) + y(2x^3 + 3y^2)$

$= (2x^3 + 3y^2)(x + y)$, पहले की भाँति

3. *नीचे दी गई सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा :*

(I) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(II) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(III) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(IV) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(V) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(VI) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

(VII) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

वास्तव में, सर्वसमिकाएँ (I) और (II) समतुल्य हैं। यदि इनमें से किसी भी एक में b के स्थान पर $-b$ लिख दें, तो दूसरी आ जाएगी। यहाँ इन्हें सुविधा की दृष्टि से अलग-अलग लिखा गया है। इसी प्रकार ऊपर (V) और (VI) में भी कोई अंतर नहीं; ये भी समतुल्य हैं। ऊपर की सर्वसमिकाओं तथा गुणनखंडन किए जाने वाले व्यंजक, माना A के विषय में, निम्नलिखित तथ्यों पर भी ध्यान दीजिए :

A *को यदि दो व्यंजकों के वर्गों के अंतर के रूप में लिखा जा सकता है, तो ऊपर की सर्वसमिका* (III) *का प्रयोग करना होगा।*

उदाहरणत: $4x^2 - 25y^4 = (2x)^2 - (5y^2)^2 = (2x + 5y^2)(2x - 5y^2)$

A को यदि ऐसे तीन पदों में ला सकें जिनमें से दो किन्हीं व्यंजकों के वर्ग हों, तो सर्वसमिका (I) या (II) उपयोगी हो सकती है।

उदाहरण 2 : $4x^2 + 12xy + 9y^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि $4x^2 = (2x)^2 = a^2$ कहिए और $9y^2 = (3y)^2 = b^2$ कहिए। यहाँ $a = 2x$ और $b = 3y$ है। इससे सुझाव मिलता है कि शायद सर्वसमिका I या II काम आ जाए। अब हम तीसरे पद को जाँचकर देखेंगे कि क्या यह $2ab$ अथवा $-2ab$ है। अब $12xy = 2(2x)(3y)$ को $2ab$ लिखा जा सकता है। अत: सर्वसमिका (I) का प्रयोग किया जा सकता है और दिया हुआ व्यंजक $(a + b)^2$ के तुल्य है। फलत:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$$

$$= (2x + 3y)(2x + 3y)$$

A को यदि ऐसे व्यंजक के तुल्य बनाया जा सके जिसमें तीन पद किन्हीं व्यंजकों के वर्ग हों, तो सर्वसमिका (VII) उपयोगी हो सकती है।

उदाहरण 3 : $x^2 + 4 + 9z^2 + 4x - 6xz - 12z$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : तीन वर्गों, $x^2, (2)^2$, तथा $(3z)^2$ की उपस्थिति ज्ञान कराती है कि सर्वसमिका (VII) का प्रयोग किया जा सकता है। अत: हम लिखते हैं :

$$A = x^2 + (2)^2 + (3z)^2 + 4x - 6xz - 12z$$

अब हम देखते हैं कि गुणन पदों में अंतिम दो पद ऋणात्मक हैं, और इन दोनों में z है।

अत: हम A को इस प्रकार लिखते हैं :

$$A = (x)^2 + (2)^2 + (-3z)^2 + 2.2.x + 2.x.(-3z) + 2.2.(-3z) = (x + 2 - 3z)^2$$

$$= (x + 2 - 3z)(x + 2 - 3z)$$

वैकल्पिक हल : ध्यान दीजिए कि व्यंजक के पहले दो पद क्रमश: x तथा 2 के वर्ग हैं। इससे सुझाव मिलता है कि व्यंजक A के पदों का निम्नानुसार समूहन करना चाहिए :

$$A = (x^2 + 4x + 4) + 9z^2 - 6xz - 12z$$

$$= (x + 2)^2 + (3z)^2 - 6z(x + 2)$$

(सर्वसमिका (I) का प्रयोग कर और अंतिम दो पदों में से $6z$ बाहर निकालकर)

$$= (x + 2)^2 + (3z)^2 - 2(x + 2)(3z)$$

$$= [(x + 2) - (3z)]^2$$

$$= (x + 2 - 3z)^2 = (x + 2 - 3z)(x + 2 - 3z)$$

टिप्पणी : क्योंकि a का वर्ग वही होता है जो $-a$ का, अत: ऊपर A को हम $(-x - 2 + 3z)^2$ या $(3z - x - 2)^2$ भी मान सकते थे।

A *को यदि ऐसे व्यंजक के तुल्य बनाया जा सके जिसमें* (i) *दो पद किन्हीं व्यंजकों के घन हों, और* (ii) *शेष दो पद* 3 *के गुणज हों तो सर्वसमिका* (V) *या* (VI) *लाभप्रद हो सकती है।*

उदाहरण 4 : व्यंजक $27p^3 + 54p^2q + 36pq^2 + 8q^3$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि प्रथम पद $3p$ का घन है और अंतिम पद $2q$ का घन है। शेष दोनों पद 3 से विभाजित हो जाते हैं। फलत: दिया हुआ व्यंजक सर्वसमिका (V) की एक सम्भव दशा है। इसे बदलकर नीचे की भाँति लिखा जा सकता है:

$$(3p)^3 + 3(3p)^2(2q) + 3(3p)(2q)^2 + (2q)^3 \text{ या, } (3p + 2q)^3$$

या, $(3p + 2q)(3p + 2q)(3p + 2q)$

टिप्पणी : $(3p + 2q)^3$ को $(3p + 2q)(3p + 2q)(3p + 2q)$ लिखकर, सामान्य रूप से गुणा कीजिए और अपने हल की सत्यता जाँचिए।

उदाहरण 5 : व्यंजक $8a^3 - 60a^2 + 150a - 125$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि प्रथम पद $2a$ का और अंतिम -5 का घन है। शेष दोनों पद 3 से विभाजित हो जाते हैं। अत: यह व्यंजक सर्वसमिका (VI) की एक सम्भव दशा है। इसे निम्न भाँति लिखा जा सकता है :

$$(2a)^3 - (5)^3 - 3.2a.5(2a - 5) = (2a - 5)^3 \text{ [सर्वसमिका (VI) से]}$$

$$= (2a - 5)(2a - 5)(2a - 5)$$

A *यदि* $x^2 + bx + c$ *के रूप में हो और आप दो अचर* p *तथा* q *ऐसे खोज सकें कि* $b = p + q, c = pq$, *तो सर्वसमिका* (IV) *का प्रयोग करें।*

उदाहरण 6 : $x^2 + 21x + 104$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : क्योंकि दिया गया व्यंजक $x^2 + bx + c$ के रूप में है, हम ऐसे दो अचर p और q खोजने का प्रयास करेंगे कि

$$p + q = 21 \text{ तथा } pq = 104$$

स्पष्टत: p तथा q दोनों धनात्मक हैं।

यहाँ युक्ति यह लगाएँगे कि अचर पद c को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखा जाए। यदि इन संख्याओं का योगफल x का गुणांक b आ जाए, तो काम बन जाएगा। यहाँ

$$c = 104 = 2 \times 52 = 4 \times 26 = 8 \times 13$$

हर बार जब हम c को गुणनफल के रूप में लिखें, हमें देखना चाहिए कि क्या दोनों गुणनखंडों का योगफल b आया। यहाँ $b = 21$ है, और हम देखते हैं कि

$$2 + 52 > 21, 4 + 26 > 21, 8 + 13 = 21.$$

फलत: दिए गए व्यंजक का गुणनखंडन है $(x + 8)(x + 13)$। अत:

$$x^2 + 21x + 104 = (x + 8)(x + 13)$$

टिप्पणी : वास्तव में, मध्य पद $21x$ को दो भागों ($13x$ और $8x$) में बाँटते हुए

$$\begin{aligned} x^2 + 21x + 104 &= x^2 + 13x + 8x + 104 \\ &= (x^2 + 13x) + (8x + 104) \\ &= x(x + 13) + 8(x + 13) \\ &= (x + 8)(x + 13) \end{aligned}$$

उदाहरण 7 : (i) $x^2 + 2x - 63$ और (ii) $x^2 - 5x + 6$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : (i) यहाँ अचर पद -63 ऋणात्मक है। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम दो अचर p और q ऐसे निकाल सकें कि

$$p + q = 2, \text{ और } pq = -63, \text{ तो}$$

क्योंकि pq ऋणात्मक है, यह स्पष्ट है कि p और q में से एक ऋणात्मक होगा। आइए p और q निकालने के लिए अटकल लगाएँ। अब

$$-63 = 3 \times (-21) = (-3) \times 21 = 9 \times (-7) = (-9) \times 7$$

क्योंकि हम चाहते हैं कि दोनों गुणनखंडों का योगफल 2 हो, हम ऊपर से गुणनखंडों 9 और –7 का युग्म चुन लेते हैं। फलत:

$$x^2 + 2x - 63 = (x + 9)(x - 7)$$

वास्तव में, मध्य पद $2x$ को दो भागों $9x$ और $-7x$ में बाँटने पर

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 63 &= x^2 + (9x - 7x) - 63 \\ &= (x^2 + 9x) - (7x + 63) \\ &= x(x + 9) - 7(x + 9) \\ &= (x + 9)(x - 7) \end{aligned}$$

(ii) यहाँ दो अचर p और q ऐसे निकालने हैं कि

$$p + q = -5 \text{ और } pq = 6$$

क्योंकि $p + q$ ऋणात्मक है, अत: p और q में से कम-से-कम एक तो ऋणात्मक है ही। पर साथ ही क्योंकि pq धनात्मक है, तो p और q या तो दोनों ही धनात्मक होंगे या दोनों ही ऋणात्मक। इस प्रकार pq में से एक के ऋणात्मक होने के कारण ये दोनों ही ऋणात्मक हैं। अब

$$6 = (-1) \times (-6) = (-2) \times (-3)$$

अत: $p = -2$ और $q = -3$ लेने से हमारा काम चल जाएगा। फलत:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

टिप्पणी : p तथा q के मान निकालने के लिए आप सम्बन्ध

$$(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$$

का प्रयोग कर सकते हैं। ऊपर (i) से $p + q$ और pq का मान लेने पर

$$(p - q)^2 = 2^2 - 4 \times (-63) = 256 = (16)^2$$

फलत: $p - q = 16$ अथवा $p - q = -16$ हुआ। यदि $p - q = 16$, तो क्योंकि $p + q = 2$ है, $p = 9$ तथा $q = -7$ हुआ। इसी प्रकार यदि $p - q = -16$, तो $p = -7$ तथा $q = 9$ होगा।

उदाहरण 8 : $(x + y)^3 - (x - y)^3 - 6y(x^2 - y^2)$ को सरल कीजिए।

हल : माना कि

$$x + y = a, x - y = b$$

तब $ab = (x + y)(x - y)$

$= x^2 - y^2$

तथा $a - b = (x + y) - (x - y) = 2y$

अब $(x + y)^3 - (x - y)^3 - 6y(x^2 - y^2) = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 3(x^2 - y^2)(2y)$

$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$= (a - b)^3$

$= \{(x + y) - (x - y)\}^3$

$= (2y)^3$

$= 8y^3$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए :

    (a) $3x^2 + 6xy$ (b) $7mn - 21m^2n^2$ (c) $3p^2q^2 + 2p^3q + 9pq^2$

    (d) $a^3b^3 + 2a^2b^2 + a^2b^4$ (e) $46x^2 + 2xy + 10y^3$ (f) $ap^2 + bp^2 + aq^2 + bq^2$

2. किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंडन कीजिए :

    (a) $4x^2 + 4xy + y^2$ (b) $9x^2 - 6xy + y^2$ (c) $x^2 - 4y^2$

    (d) $25p^2 - 36q^2$ (e) $49a^2 - 42ab + 9b^2$ (f) $16x^2 + 24xy + 9y^2$

    (g) $x^2 - y^2 + 2x + 1$ (h) $4a^2 - 4b^2 + 4a + 1$

3. गुणनखंडन कीजिए :

    (a) $p^2 + q^2 + 9r^2 + 2pq + 6pr + 6qr$

    (b) $4a^2 + b^2 + 4ab + 8a + 4b + 4$

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$

    (d) $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab + 4ac + 6bc$

4. उपयुक्त सर्वसमिका के प्रयोग से प्रत्येक निम्नलिखित बीजीय व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

   (a) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

   (b) $8x^3 + y^3 + 12x^2y + 6xy^2$

   (c) $8p^3 + 27q^3 + 36p^2q + 54pq^2$

   (d) $8p^3 - 27q^3 - 36p^2q + 54pq^2$

   (e) $x^3 - 12x(x - 4) - 64$

   (f) $a^3x^3 - 3a^2bx^2 + 3ab^2x - b^3$

5. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन कीजिए :

   (a) $x^2 + x - 12$ (b) $x^2 - 10x + 25$ (c) $x^2 - 121$

   (d) $x^2 - 10x + 9$ (e) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$ (f) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

   (g) $(x + 2)^2 + p^2 + 2p(x + 2)$

6. $(a + b)^3 + (a - b)^3 + 6a(a^2 - b^2)$ को सरल कीजिए।

7. गुणनखंडन कीजिए :

   (a) $\frac{4}{9}a^2 + b^2 + \frac{4}{3}ab$ (b) $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$

   (c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$ (d) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

   (e) $p^3 - p^2q + \frac{1}{3}pq^2 - \frac{1}{27}q^3$ (f) $\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{6}ab^2 + \frac{1}{27}b^3$

8. सिद्ध कीजिए कि यदि $a + b$ शून्य न हो, तो $x = a + b$ निम्नलिखित समीकरण का हल है :

$$a(x - a) = 2ab - b(x - b)$$

9. यदि $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a = b$ है।

10. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखंडन कीजिए:

   (a) $a^4 - b^4$ (b) $a^4 - 16b^4$

   (c) $a^2 - (b - c)^2$ (d) $x^2 + 7xy + 12y^2$

   (e) $x^2 + 2ax - b^2 - 2ab$ (f) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$

   [संकेत: (f) में $x^2 + x$ को y लिखिए।]

11. यदि $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$, तो $x^2 + pxy + qy^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

[संकेत : दाएँ पक्ष का प्रसार कीजिए। अब p और q के मान a तथा b के पदों में निकालिए और इन मानों को गुणनखंडन करने वाले व्यंजक में रखिए।]

2.3 $ax^2 + bx + c$ रूप वाले व्यंजकों का गुणनखंडन

आप पहले सीख चुके हैं कि $x^2 + bx + c$ रूप के बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने के लिए मध्य पद b को दो ऐसे भागों p और q में बाँटते हैं कि $p + q = b$ और $pq = c$ हो जाए। यह दिखाया जा सकता है कि हम बीजीय व्यंजक $ax^2 + bx + c$ जहाँ $a \neq 0$, का गुणनखंडन भी इसके मध्य पद को दो भागों में बाँटकर कर सकते हैं, यदि हम दो पूर्णांक p और q ऐसे निकाल सकें कि

$$b = p + q, \; ac = pq$$

अब उदाहरणों से इस विधि को समझाया जाएगा।

टिप्पणी : इस बात की कोई गारंटी नहीं कि हम ऊपर जैसे p और q खोज ही सकेंगे। उदाहरण 12 देखिए।

उदाहरण 9 : $2x^2 + 7x + 3$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : आइए, ऐसे पूर्णांक p और q खोजें कि

$$p + q = 7 \quad (x \text{ का गुणांक})$$

और $pq = 2 \times 3$ (x^2 के गुणांक और अचर पद का गुणनफल)।

अब 6 को हम लिख सकते हैं, 1×6 या 2×3। हम देखते हैं कि $1 + 6 = 7$ है। अतः हम $p = 1$ और $q = 6$ ले सकते हैं। p तथा q के इन मानों के लिए हम दिए गए व्यंजक को इस भाँति लिख सकते हैं :

$$\begin{aligned}
2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + (1 + 6)x + 3 \\
&= 2x^2 + x + 6x + 3 \\
&= (2x^2 + x) + (6x + 3) \\
&= x(2x + 1) + 3(2x + 1) \\
&= (2x + 1)(x + 3)
\end{aligned}$$

उदाहरण 10 : $6x^2 + 5x - 6$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें ऐसे पूर्णांक l तथा m खोजने हैं कि

$$l + m = 5 \ (x \text{ का गुणांक})$$

और $\quad lm = 6 \times (-6) = -36$ (x^2 के गुणांक और अचर पद का गुणनफल)

क्योंकि lm एक ऋण पूर्णांक है, अत: l तथा m में से एक धन और दूसरा ऋण पूर्णांक होगा। अब -36 को लिखा जा सकता है :

$1 \times (-36)$ या -1×36 या $2 \times (-18)$ या -2×18 या $3 \times (-12)$ या -3×12 या $4 \times (-9)$ या -4×9 आदि।

अब आकर हम पाते हैं कि $-4 + 9 = 5$ हो जाता है। अत: हम $l = -4$ और $m = 9$ ले सकते हैं। l और m के यह मान लेने पर दिया गया व्यंजक इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{aligned} 6x^2 + 5x - 6 &= 6x^2 + (9 - 4)x - 6 \\ &= 6x^2 + 9x - 4x - 6 \\ &= (6x^2 + 9x) - (4x + 6) \\ &= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3) \\ &= (2x + 3)(3x - 2) \end{aligned}$$

उदाहरण 11 : $12x^2 - 7x + 1$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : ऐसे पूर्णांक p और q खोजने हैं कि $p + q = -7$, और $pq = 12$ हो।

क्योंकि $p + q$ एक ऋण पूर्णांक है, अत: p और q में से कम-से-कम एक तो अवश्य ही ऋण पूर्णांक होगा। पर साथ ही pq के एक धन पूर्णांक होने के कारण या तो p और q दोनों ही धनात्मक होंगे, या फिर दोनों ही ऋणात्मक। क्योंकि इनमें से एक तो ऋणात्मक है ही, अत: दोनों ही ऋणात्मक होंगे। अत: हम 12 के केवल ऋणात्मक गुणनखंड ही लेंगे। अब

$$pq = 12 = -1 \times (-12) = -2 \times (-6) = -3 \times (-4)$$

और इनमें से $-3 + (-4) = -7$ है। अत:

$$12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 3x - 4x + 1$$

$$= (12x^2 - 3x) - (4x - 1)$$
$$= 3x(4x - 1) + (-1) \times (4x - 1)$$
$$= (4x - 1)(3x - 1)$$

उदाहरण 12 : जाँचिए कि क्या $10x^2 + 5x + 1$ को दो रैखिक गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

हल : सम्भव होने की दशा में हमें ऐसे पूर्णांक l तथा m खोजने हैं जिनके लिए

$l + m = 5$ और $lm = 10$ हो। अब

$10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$

पर इन युग्मों 1, 10 और 2, 5 में से कोई ऐसा नहीं है जिसके पदों का योगफल 5 हो। अत: दिए गए व्यंजक को पूर्णांक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में नहीं लिखा जा सकता।

अभी तक हमने जो व्यंजक लिए उनमें गुणांक केवल पूर्णांक थे और हमने गुणनखंड भी केवल पूर्णांक गुणांकों वाले लिए। लेकिन मध्य पद को बाँटकर $ax^2 + bx + c$ के गुणनखंड करने की विधि उस दशा में भी काम देती है जब गुणांक चाहे पूर्णांक न भी हों। हाँ, यह बात और है कि इस दशा में गुणनखंडों के गुणांकों का भी पूर्णांक होना आवश्यक नहीं। इस दशा में हम ऐसी वास्तविक संख्याएँ l और m खोजने का प्रयास करेंगे जिनके लिए

$l + m = b$ और $lm = ac$

हो। आइए, उदाहरणों द्वारा इस प्रक्रम को समझा जाए।

उदाहरण 13 : $\frac{1}{2}y^2 - 3y + 4$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें ऐसी वास्तविक संख्याएँ l और m खोजनी हैं कि

$l + m = -3$ और $lm = 2$

क्योंकि $l + m$ ऋणात्मक है, अत: l और m में से कम-से-कम एक तो अवश्य ऋणात्मक है। लेकिन lm के धनात्मक होने के कारण l और m या तो दोनों ही ध नात्मक हैं या दोनों ही ऋणात्मक। क्योंकि दोनों में से एक तो ऋणात्मक है ही, अत:

दोनों ही ऋणात्मक हैं। स्पष्ट है कि l और m के मान –1 और –2 लिए जा सकते हैं। माना कि $l=-1$ और $m=-2$ है। अब

$$\frac{1}{2}y^2-3y+4=\frac{1}{2}y^2+(-2y-y)+4 \text{ (मध्य पद को बाँटकर)}$$
$$=(\frac{1}{2}y^2-y)-2y+4 \text{ (समूहन करने पर)}$$
$$=y(\frac{1}{2}y-1)-4(\frac{1}{2}y-1)$$
$$=(\frac{1}{2}y-1)(y-4)$$
$$=\frac{1}{2}(y-2)(y-4)$$

टिप्पणियाँ : 1. जब गुणांक परिमेय संख्याएँ हों, तो आपको इस बात पर थोड़ा ध्यान देना चाहिए कि आप समूहित किए गए पदों में से क्या सार्व गुणनखंड निकाल रहे हैं। पहले समूह के दो पदों में से जो गुणनखंड उपयुक्त लगे, वह ले लीजिए। लेकिन दूसरे समूह में से वह गुणनखंड लीजिए जिससे इस समूह में भी वही रैखिक गुणनखंड बचे जो पहले समूह में आया हुआ है। उदाहरणत: हमने पहले समूह में से y बाहर निकाला और इससे हमें रैखिक गुणनखंड $(\frac{1}{2}y-1)$ प्राप्त हुआ। अब दूसरे समूह $(-2y+4)$ में से हम –2 बाहर निकाल सकते थे और इससे $(y-2)$ गुणनखंड बचता। पर क्योंकि हम तो रैखिक गुणनखंड $(\frac{1}{2}y-1)$ लाना चाहते थे, अत: हमने –4 बाहर लिया जिससे इच्छित गुणनखंड आ गया। वैकल्पिक रूप से, हम पहले समूह में से $(\frac{1}{2}y-1)$ लेकर नीचे लिखे अनुसार क्रिया कर सकते थे :

$$(\frac{1}{2}y^2-y)-2y+4=\frac{1}{2}y(y-2)-2(y-2)$$
$$=(y-2)(\frac{1}{2}y-2)$$
$$=\frac{1}{2}(y-2)(y-4)$$

2. यदि किसी रैखिक गुणनखंड में एक या एक से अधिक गुणांक पूर्णांक न हों, तो ऐसी उपयुक्त संख्या को इनमें से निकालिए कि इनके गुणांक पूर्णांक बन जाएँ। उदाहरणतः हमने $(\frac{1}{2}y-1)$ में से $\frac{1}{2}$ बाहर लेकर इसे $(\frac{1}{2}y-1)$ के स्थान पर $\frac{1}{2}(y-2)$ लिखा। यह एक अच्छी विधि है।

3. आप दिए हुए व्यंजक को $\frac{1}{2}(y^2-6y+8)$ लिखकर y^2-6y+8 के गुणनखंड निकालने का प्रयास भी कर सकते थे। बहुधा यह युक्ति काम आ जाती है। अगला उदाहरण देखिए।

उदाहरण 14 : $x^2-2x+\frac{7}{16}$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : दिया गया व्यंजक इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$x^2-2x+\frac{7}{16}=\frac{1}{16}(16x^2-32x+7)$$

$$=\frac{1}{16}[16x^2-28x-4x+7]$$

$$=\frac{1}{16}[4x(4x-7)-1(4x-7)]$$

$$=\frac{1}{16}(4x-7)(4x-1)$$

उदाहरण 15 : $\sqrt{3}x^2+11x+6\sqrt{3}$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें ऐसे पूर्णांक l और m निकालने हैं कि

$$l+m=11, \text{ तथा } lm=\sqrt{3}\times6\sqrt{3}=18$$

स्पष्टतः $l=9$ और $m=2$ यहाँ काम दे जाएँगे।

$$\sqrt{3}x^2+11x+6\sqrt{3} = \sqrt{3}x^2+(9x+2x)+6\sqrt{3} \quad \text{(मध्य पद को बाँटकर)}$$

$$= (\sqrt{3}x^2 + 9x) + (2x + 6\sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{3}x)(x + 3\sqrt{3}) + 2(x + 3\sqrt{3})$$

$$= (x + 3\sqrt{3})(\sqrt{3}x + 2)$$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक को पूर्णांक गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $5x^2 + 16x + 3$ (b) $9x^2 + 18x + 8$ (c) $2x^2 + 11x - 21$

(d) $2x^2 - 7x - 15$ (e) $3x^2 - 14x + 8$ (f) $3u^2 - 10u + 8$

(g) $6u^2 + 17u + 12$ (h) $24p^2 - 41p + 12$ (i) $4p^2 - 17p - 21$

[संकेत ; (*h*) $288 = 2 \times 144 = 4 \times 72 = 8 \times 36 = 16 \times 18 = 32 \times 9 = ...$]

2. उदाहरण 14 की विधि से निम्नलिखित में से प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन वास्तविक संख्याओं के गुणांकों वाले रैखिक गुणनखंडों में कीजिए:

(a) $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$ (b) $2x^2 - x + \frac{1}{8}$

(c) $2x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{12}$ (d) $x^2 + \frac{12}{35}x + \frac{1}{35}$

(e) $21x^2 - 2x + \frac{1}{21}$

3. गुणनखंडन कीजिए :

(a) $\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$

(b) $2x^2 + 3\sqrt{3}x + 3$ [संकेत : $lm = 2 \times 3 = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$]

(c) $5\sqrt{5}x^2 + 20x + 3\sqrt{5}$ [संकेत : $5\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 5 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$]

(d) $2x^2 + 3\sqrt{5}x + 5$

(e) $7x^2 + 2\sqrt{14}x + 2$

2.4 $x^3 \pm y^3$ का गुणनखंडन

आप सर्वसमिका (V) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

से परिचित हैं। यहाँ से $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

$$= (x + y)\{(x + y)^2 - 3xy\}$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

इस प्रकार हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

(VIII) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

इसी प्रकार, सर्वसमिका (VI) अर्थात्

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

से हमें प्राप्त होता है : $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$

$$= (x - y)\{(x - y)^2 + 3xy\}$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

फलतः हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

(IX) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

उदाहरण 16 : $27x^3 + 64y^3$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : $27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3$

$$= (3x + 4y)\{(3x)^2 - (3x)(4y) + (4y)^2\}$$ [सर्वसमिका VIII से]

$$= (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$$

उदाहरण 17 : $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 8 = (a + b)^3 - 2^3$

$$= \{(a + b) - 2)\}\{(a + b)^2 + (a + b).2 + 2^2\}$$

$$= (a + b - 2)(a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b + 4)$$

2.5 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का गुणनखंडन

अब हम व्यंजक $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ के गुणनखंड निकालेंगे।

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x^3 + y^3) + z^3 - 3xyz \\
&= \{(x + y)^3 - 3xy\,(x + y)\} + z^3 - 3xyz \\
&= u^3 - 3xyu + z^3 - 3xyz, \text{ जहाँ } u = x + y, \text{ है।} \\
&= (u^3 + z^3) - 3xyu - 3xyz \\
&= (u + z)\,(u^2 - uz + z^2) - 3xy\,(u + z) \\
&= (u + z)\,(u^2 + z^2 - uz - 3xy) \\
&= (x + y + z)\,[(x + y)^2 + z^2 - z\,(x + y) - 3xy], \\
&\qquad \text{क्योंकि } u = x + y \\
&= (x + y + z)\,[(x^2 + y^2 + 2xy) + z^2 - xz - yz - 3xy] \\
&= (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy)
\end{aligned}$$

इस प्रकार हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

(X) $\quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy)$

ध्यान दीजिए कि यदि $x + y + z$ शून्य हो, तो ऊपर **(X)** का दायाँ पक्ष शून्य हो जाता है। अत: बायाँ पक्ष भी शून्य हो जाएगा। फलत: हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है।

(XI) $\quad x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz,$ यदि $x + y + z = 0$ है।

सर्वसमिका **(XI)** को हम स्वतंत्र रूप से इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं :

माना कि $x + y + z = 0$, अर्थात् $x = -(y + z)$। फलत:

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 &= \{-(y + z)\}^3 + y^3 + z^3. \\
&= -[y^3 + z^3 + 3yz\,(y + z)] + y^3 + z^3 \\
&= -3yz\,(-x) = 3xyz, \text{ क्योंकि } \quad y + z = -x
\end{aligned}$$

उदाहरण 18 : $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc$ को $a - b - c$ से गुणा कीजिए।

हल : $a = x, b = -y, c = -z$ होने पर दिए गए व्यंजक बन जाते हैं :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \text{ और } x + y + z$$

अतः अभीष्ट गुणनफल है :

$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)(x + y + z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ [सर्वसमिका (X) से]

इस प्रकार $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc)(a - b - c) = a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$

उदाहरण 19 : $a^3 - b^3 + 1 + 3ab$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : $a^3 - b^3 + 1 + 3ab \;=\; a^3 + (-b)^3 + 1^3 - 3(a)(-b)(1)$

$$= (a - b + 1)(a^2 + b^2 + 1 + ab - a + b)$$

$$= (a - b + 1)(a^2 + b^2 + ab - a + b + 1)$$

[सर्वसमिका (X) से]

उदाहरण 20 : $2\sqrt{2}a^3 + 8b^3 - 27c^3 + 18\sqrt{2}abc$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि दिए हुए व्यंजक को पुन: इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$(\sqrt{2}a)^3 + (2b)^3 + (-3c)^3 - 3(\sqrt{2}a)(2b)(-3c)$$

$$= (\sqrt{2}a + 2b - 3c) \times (2a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2\sqrt{2}ab + 6bc + 3\sqrt{2}ac),$$

[सर्वसमिका (X) से]

उदाहरण 21 : यदि $p = 2 - a$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$a^3 + 6ap + p^3 - 8 = 0$$

हल : दी गई समिका को $p + a - 2 = 0$ लिखा जा सकता है। सर्वसमिका (XI) से

$$a^3 + p^3 + (-2)^3 = 3 \times a \times p \times (-2)$$

फलतः $\quad a^3 + 6ap + p^3 - 8 = 0$

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक के गुणनखंड कीजिए :

(a) $64a^3 + 27p^3$ (b) $x^3 - 125y^3$ (c) $1000s^3 + 27t^3$

(d) $216x^3 - 125y^3$ (e) $343 + 27t^3$ (f) $64 - 343z^3$

(g) $(a + b)^3 - 8$ (h) $8y^3 + 64b^3$ (i) $(a + b)^3 - (a - b)^3$

2. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक के गुणनखंड कीजिए :

(a) $a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc$

(b) $p^3 - 27q^3 + 8r^3 + 18pqr$

(c) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$

(d) $8x^3 - 125y^3 + 180xy + 216$

(e) $2\sqrt{2}a^3 + 16\sqrt{2}b^3 + c^3 - 12abc$ [संकेत : $16\sqrt{2} = 8 \times 2\sqrt{2}$]

(f) $2\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{3}y^3 + \sqrt{5}(5 - 3\sqrt{6}xy)$

3. गुणा कीजिए :

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz$ को $x + y - z$ से

(b) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + xz - 2yz$ को $x - 2y + z$ से

(c) $x^2 + 4y^2 + 2xy - 3x + 6y + 9$ को $x - 2y + 3$ से

(d) $9x^2 + 25y^2 + 15xy + 12x - 20y + 16$ को $3x - 5y - 4$ से

4. मान निकालिए :

(a) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$, जब $x + y = -4$

(b) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$, जब $x = 2y + 6$

(c) $(x - a)^3 + (x - b)^3 + (x - c)^3 - 3(x - a)(x - b)(x - c)$, जब $a + b + c = 3x$

5. सिद्ध कीजिए कि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

[संकेत : $(a^2 + b^2 + ...)$ को $\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + ...)$ लिखिए।]

6. सिद्ध कीजिए :

$(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

2.6 शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) तथा गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem)

निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों पर ध्यान दीजिए :

(i) $2x^3 - 5x^2 + 6x + 7$ (ii) $4x^2 + 9x - 1$

(iii) $3x - 6$ (iv) 78

इन सब बीजीय व्यंजकों में निम्नलिखित विशेषताएँ हैं :

1. प्रत्येक व्यंजक में केवल एक चर x है।
2. प्रत्येक पद में चर की घात एक ऋणेतर (ऋण न हो, शून्य अथवा धन हो) पूर्णांक है। (iv) में 78 जैसे पद को $78x^0$ जानिए।)

याद कीजिए कि ऐसे बीजीय व्यंजकों को एक चर x वाला *बहुपद* कहते हैं। बहुपद के प्रत्येक पद में संख्यात्मक गुणनखंड को इस पद के चर भाग का *गुणांक* कहते हैं। इस प्रकार ऊपर (i) में x^3 का गुणांक 2 है। (ii) में x का गुणांक 9 है। ऊपर प्रत्येक बहुपद के अंतिम पद में x नहीं आता। इस पद को *अचर* पद कहा जाता है। इस प्रकार ऊपर (iii) में अचर पद –6 है। अचर पद को x^0 (x का शून्यवाँ घात) का गुणांक समझा जाता है। बहुपद में उच्चतम घातांक को, अर्थात् सबसे बड़ी घात वाले पद के घातांक को बहुपद की *घात* कहा जाता है।

उदाहरणत: ऊपर बहुपद (i) की घात 3 है। घात 3 वाले बहुपद को *त्रिघाती* बहुपद कहा जाता है। ऊपर बहुपद (ii) की घात 2 है। घात 2 वाले बहुपद को *द्विघाती* बहुपद कहा जाता है। बहुपदों (iii) और (iv) के घात क्रमश: 1 और 0 हैं। घात एक वाले बहुपद को *रैखिक* बहुपद कहा जाता है और घात शून्य वाले बहुपद अचर कहलाते हैं।

हम बहुपदों को बहुधा $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(x)$ जैसे प्रतीकों द्वारा व्यक्त करते हैं। इस प्रकार, हम लिख सकते हैं :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ p(y) = 3y^3 + 5y - 2,\ q(z) = -7z + 8 \text{ आदि।}$$

ध्यान दीजिए कि बहुपद $p(y)$ में चर y है और बहुपद $q(z)$ का चर z है।

अब निम्नलिखित बहुपद को लेते हैं :

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 3$$

यदि इस बहुपद में हम सभी पदों में x के स्थान पर 2 लिख दें, तो हमें प्राप्त होगा :

$$f(2) = 3 \times 2^2 - 7 \times 2 + 3$$

$$= 1$$

= 2 पर $f(x)$ का मान 1 है। व्यापक रूप से, यदि

$ax^3 + bx^2 + cx + d,$

: d वास्तविक संख्याएँ हैं, तो $x = k$ पर $f(x)$ का मान होगा :

$ak^3 + bk^2 + ck + d$

क रूप-विशेष वाले व्यंजकों के अलावा कुछ और नहीं है, अतः
ा व्यंजकों की ही भाँति जोड़ा, घटाया, गुणा किया और भाग किया
, इनके विशेष रूप के कारण क्रियाविधि को एक सुविधाजनक ढंग
होता है। आइए, कुछ उदाहरणों द्वारा इस बात को समझा जाए।

$\jmath(x) = x^3 - 2x^2 - 3$ और $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 7x$ का योग कीजिए।

ते हैं कि बीजीय व्यंजकों का योग करने के लिए हम समान पदों
हैं और चिन्हों को लेते हुए इनके गुणांकों का समूहवार योग कर
के सन्दर्भ में समान घात वाले पद ही समान पद होते हैं। फलतः

$$
\begin{aligned}
\cdot\, q(x) &= (x^3 - 2x^2 - 3) + (x^4 + x^3 + x^2 - 7x)\\
&= x^4 + (x^3 + x^3) + (-2x^2 + x^2) + (-7x) + (-3)\\
&= x^4 + 2x^3 - x^2 - 7x - 3
\end{aligned}
$$

आप योग की यह क्रिया ऊपर-से-नीचे इस प्रकार कर सकते हैं :

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \quad\;\; x^3 - 2x^2 \qquad - 3\\
q(x) &= x^4 + x^3 + x^2 - 7x\\
q(x) &= x^4 + 2x^3 - x^2 - 7x - 3
\end{aligned}
$$

ी ऊपर-से-नीचे वाली विधि का प्रयोग करते समय आपको इस बात
ाहिए कि चर के समान घातों वाले पद एक-दूसरे की सीध में लिखे
लिए बीच-बीच में खाली स्थान क्यों न छोड़ने पड़ें।

$q(u) = u^5 + u^4 - u^2 - u$ को $p(u) = u^6 + u^4 + 3u^2 + 7u - 4$ में से

$-\,q(u)$ का मान ज्ञात करना है।

$$q(u) = (u^6 + u^4 + 3u^2 + 7u - 4) - (u^5 + u^4 - u^2 - u)$$

$$= u^6 - u^5 + (u^4 - u^4) + (3u^2 + u^2) + (7u + u) - 4$$
$$= u^6 - u^5 + 4u^2 + 8u - 4$$

टिप्पणी : $q(u)$ को $p(u)$ में से घटाना और $-q(u)$ तथा $p(u)$ का योग करना, एक ही बात है। अब

$-q(u) = -u^5 - u^4 + u^2 + u = r(u)$ कहिए।

अब $p(u)$ और $r(u)$ का पिछले उदाहरण की भाँति ऊपर-से-नीचे योग कर लीजिए।

उदाहरण 24 : बहुपदों

$f(y) = y^3 - 3y^2 + 4y$ और $g(y) = y^2 + 4y + 3$

का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $f(y).g(y) = (y^3 - 3y^2 + 4y)(y^2 + 4y + 3)$
$$= y^3(y^2 + 4y + 3) - 3y^2(y^2 + 4y + 3) + 4y(y^2 + 4y + 3)$$
$$= y^5 + 4y^4 + 3y^3 - 3y^4 - 12y^3 - 9y^2 + 4y^3 + 16y^2 + 12y$$
$$= y^5 + (4y^4 - 3y^4) + (3y^3 - 12y^3 + 4y^3) + (-9y^2 + 16y^2) + 12y$$
$$= y^5 + y^4 - 5y^3 + 7y^2 + 12y$$

टिप्पणी : ऊपर गुणनफल निकालने की क्रिया इन दो चरणों में की गई :

चरण 1 : $f(y)$ के प्रत्येक पद को बारी-बारी से $g(y)$ से गुणा करना।

अर्थात्

$y^3.g(y) = y^3(y^2 + 4y + 3), -3y^2.g(y) = -3y^2(y^2 + 4y + 3), 4y.g(y) = 4y(y^2 + 4y + 3)$

ज्ञात करना।

चरण 2 : चरण 1 वाले सब गुणनफलों का योग करना। अर्थात्

$y^3.g(y), -3y^2.g(y)$, और $4y.g(y)$ का योग करना।

इन दोनों चरणों की क्रिया को निम्नलिखित विधि से सुविधानुसार किया जा सकता है :

$g(y) = y^2 + 4y + 3$

$f(y) = y^3 - 3y^2 + 4y$ (वे बहुपद जिनको गुणा करना है।)

$$y^3.g(y) = y^5 + 4y^4 + 3y^3$$

($f(y)$ के प्रत्येक पद को बारी बारी से $g(y)$ से गुणा करने पर)

$$-3y^2.g(y) = -3y^4 - 12y^3 - 9y^2$$

$$4y.g(y) = 4y^3 + 16y^2 + 12y$$

$$f(y)\, g(y) = y^5 + y^4 - 5y^3 + 7y^2 + 12y$$

(उपर्युक्त तीनों गुणनफलों को जोड़ने पर)

एक बार चरणों की क्रिया विधि को समझ लेने के पश्चात हम बाईं ओर के पदों और समान चिन्हों को नहीं लिखते और निम्न प्रकार गुणनफल निकालते हैं :

$$\begin{array}{r} y^2 + 4y + 3 \\ \times\ y^3 - 3y^2 + 4y \\ \hline y^5 + 4y^4 + 3y^3 \qquad\qquad\qquad \\ -3y^4 - 12y^3 - 9y^2 \qquad\quad \\ 4y^3 + 16y^2 + 12y \\ \hline y^5 + y^4 - 5y^3 + 7y^2 + 12y \end{array}$$

टिप्पणियाँ : 1. '$f(x)$ की घात', घात $f(x)$ द्वारा दर्शाने पर हम देखते हैं

घात $f(y) = 3$, घात $g(y) = 2$, घात $(f(y)g(y)) = 5$

इस प्रकार, घात $(f(y)g(y)) =$ घात $(f(y)) +$ घात $(g(y))$

याद कीजिए कि यदि दो बहुपद $p(x)$ और $q(x)$ दिए हुए हों, तो हम दो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि

(i) $p(x) = q(x)g(x) + r(x)$

(ii) या तो $r(x) = 0$ या घात $r(x) <$ घात $g(x)$

हम कहते हैं कि जब $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देते हैं, तो *भागफल* (quotient) $q(x)$ है और *शेषफल* (remainder) $r(x)$ है।

2. प्रायः $p(x)$ (भाज्य) की घात को $g(x)$ (भाजक) की घात से अधिक या इसके बराबर लिया जाता है। परन्तु आप घात $p(x) <$ घात $r(x)$ भी ले सकते हैं। यह बात और है कि इस दशा में $q(x) = 0$ और $r(x) = p(x)$ होता है।

किसी बहुपद $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने का अर्थ है $q(x)$ और $r(x)$ के मान

ज्ञात करना। इसकी एक विधि तो है दीर्घ भाजन (long division)। दूसरी विधि यह है कि $p(x)$ में उपयुक्त पदों को जोड़ते और घटाते हुए $g(x)$ का एक गुणज $\{g(x)q(x)\}$ और एक व्यंजक $(r(x))$ प्राप्त करना जहाँ $r(x)$ की घात $q(x)$ की घात से कम हो। यह दोनों विधियाँ नीचे उदाहरणों द्वारा समझाई गई हैं।

उदाहरण 25 : $x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 1$ को $x + 1$ से भाग दीजिए।

हल : दीर्घ भाजन

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x - 6 \\
\hline
x+1 & x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 1 \\
 & \underline{\overset{-}{x^4} \overset{-}{+ x^3}} \\
 & \qquad x^2 - 5x + 1 \\
 & \qquad \underline{\overset{-}{x^2} \overset{-}{+ x}} \\
 & \qquad\quad -6x + 1 \\
 & \qquad\quad \underline{\overset{+}{-6x} \overset{+}{- 6}} \\
 & \qquad\qquad 7
\end{array}
$$

यहाँ आकर हम रुक जाते हैं क्योंकि शेष पद 7 की घात भाजक $x + 1$ की घात से कम रह गई। वास्तव में, यहाँ

भाज्य $\quad p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 1,$

भाजक $\quad g(x) = x + 1,$

भागफल $\quad q(x) = x^3 + x - 6,$ और

और शेषफल $\quad r(x) = 7$

अब $\quad g(x) . q(x) + r(x) = (x + 1)(x^3 + x - 6) + 7$

वैकल्पिक हल :
$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 1 \\
&= x^3(x + 1) + x^2 - 5x + 1 \\
&= x^3(x + 1) + x(x + 1) - x - 5x + 1
\end{aligned}
$$

(x जोड़ते और घटाते हुए)

$$= x^3(x+1) + x(x+1) - 6x + 1$$
$$= x^3(x+1) + x(x+1) - 6(x+1) + 6 + 1$$
$$= x^3(x+1) + x(x+1) - 6(x+1) + 7$$
$$= (x^3 + x - 6)(x+1) + 7$$

इस प्रकार पूर्व की भाँति

$p(x) = (x^3 + x - 6)\,g(x) + 7,$ जहाँ भाजक $g(x) = x + 1$

$p(x) = q(x).\,g(x) + r(x),$ जहाँ $q(x) = (x^3 + x - 6),$ और $r(x) = 7$

अब हम आपको एक ऐसी विधि सिखाएँगे जिसके द्वारा यदि आपको घात एक से अधिक घात वाले किसी बहुपद को द्विपद $x - a$ से भाग देना हो, तो बिना भाग लगाए शेषफल प्राप्त कर सकें। याद कीजिए कि शेषफल की घात भाजक की घात से कम होती है, और या फिर शेषफल शून्य होता है। यहाँ क्योंकि भाजक घात एक वाला बहुपद $x - a$ है, अतः या तो शेषफल की घात शून्य है, और या फिर शेषफल स्वयं शून्य है। अर्थात् शेषफल एक अचर है जिसका मान शून्य भी हो सकता है। आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 26 : बहुपद $p(y) = y^3 + y^2 - 2y + 1$ को द्विपद $y + 3$ से भाग देने पर जो शेषफल बचेगा,वह ज्ञात कीजिए।

हल : आइए, शेषफल निकालने के लिए दीर्घ भाजन क्रिया का प्रयोग करें।

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - 2y + 4 \\
\hline
y + 3 & y^3 + y^2 - 2y + 1 \\
 & -(y^3 + 3y^2) \\
\hline
 & -2y^2 - 2y + 1 \\
 & -(-2y^2 - 6y) \\
\hline
 & 4y + 1 \\
 & -(4y + 12) \\
\hline
 & -11
\end{array}
$$

$p(-3)$ का परिकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$p(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 2.(-3) + 1$$

$$= -27 + 9 + 6 + 1$$
$$= -11 \text{ (शेषफल)}$$

आपने क्या देखा? *जब $p(y)$ को $y + 3$ अर्थात् $y - (-3)$ से भाग दिया गया, तो शेषफल $p(-3)$ निकला।*

उदाहरण 27 : बहुपद $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ को द्विपद $x - 2$ से भाग देने पर जो शेषफल आएगा वह बताइए।

हल : अचर के अलावा पदों में से हम $x - 2$ गुणनखंड निकालने का प्रयास करेंगे। इसके लिए हर बार उपयुक्त पद को जोड़ते घटाते जाएँगे।

अब $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

$= x^3(x-2) + 4x^3 - 3x^2 + x - 1$ ($2x^3$ घटाया और जोड़ा)

$= x^3(x-2) + 4x^2(x-2) + 5x^2 + x - 1$ ($-8x^2$ घटाया और जोड़ा)

$= x^3(x-2) + 4x^2(x-2) + 5x(x-2) + 11x - 1$
($-10x$ घटाया और जोड़ा)

$= x^3(x-2) + 4x^2(x-2) + 5x(x-2) + 11(x-2) + 21$
(-22 घटाया और जोड़ा)

$= (x-2)(x^3 + 4x^2 + 5x + 11) + 21$

अब $p(x) = q(x).g(x) + r(x)$, घात $r(x) <$ घात $g(x)$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि शेषफल 21 है। दीर्घ भाजन विधि से इस परिणाम की सत्यता जाँचिए। अब $p(2)$ निकालिए।

$$p(2) = 2^4 + 2(2^3) - 3(2^2) + 2 - 1$$
$$= 16 + 16 - 12 + 2 - 1$$
$$= 21$$

इससे ज्ञात होता है कि

जब $p(x)$ को $x - 2$ से भाग दें, तो शेषफल $p(2)$ होता है।

ऐसा लगता है मानो एक प्रतिरूप उभर रहा है। इच्छानुसार कुछ बहुपद $p(x)$ और द्विपद $x - a$ लेकर $p(x)$ को $x - a$ से भाग दीजिए। जाँचिए कि क्या शेषफल सचमुच $p(a)$

है। क्या आपको परिणाम पर आश्चर्य हो रहा है? निम्नलिखित प्रमेय के कारण यह आश्चर्य बेकार है।

प्रमेय 2.1 (शेषफल प्रमेय) : *माना कि $p(x)$ एक या एक से अधिक घात वाला कोई बहुपद है और a कोई वास्तविक संख्या है। जब $p(x)$ को द्विपद $x-a$ से भाग दिया जाता है तो शेषफल $p(a)$ होता है।*

उपपत्ति : माना कि जब $p(x)$ को $x-a$ से भाग देते हैं, तो भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ आता है। इस दशा में

$$p(x) = (x-a)\,q(x) + r(x)$$

जहाँ घात $r(x) <$ घात $(x-a)$ या $r(x) = 0$। क्योंकि घात $(x-a) = 1$, अत: पहले बताया गया $r(x)$ एक अचर, कहिए r है। अत: x के समस्त मानों के लिए

$$p(x) = (x-a)\,q(x) + r$$

विशेष रूप से, $x = a$ के लिए ऊपर से प्राप्त होता है

$$p(a) = (a-a)\,q(a) + r$$

$$= 0.q(a) + r,$$

या, $$p(a) = r$$

अत: प्रमेय सिद्ध हुई।

उदाहरण 28 : यदि बहुपद $p(y) = y^4 - 3y^2 + 2y + 1$ को $y-1$ से भाग दिया जाए, तो शेषफल क्या होगा ?

हल : शेषफल प्रमेय द्वारा शेषफल है :

$$p(1) = 1^4 - 3.1^2 + 2.1 + 1$$

$$= 1 - 3 + 2 + 1$$

$$= 1$$

उदाहरण 29 : यदि बहुपद $p(x) = x^2 + 4x + 2$ को $x+2$ से भाग दें, तो शेषफल बताइए।

हल : $x + 2 = x - (-2)$। अत: शेषफल प्रमेय से शेषफल होगा :

$$p(-2) = (-2)^2 + 4.(-2) + 2$$

$$= 4 - 8 + 2$$
$$= -2$$

आप जानते हैं कि जब बहुपद $p(x)$ को द्विपद $x - a$ से भाग दें, तो

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

जहाँ $q(x)$ भागफल है और $r(x)$ शेषफल। शेषफल प्रमेय से $r(x)$ और कुछ नहीं वरन् अचर $p(a)$ है। इस प्रकार

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a) \qquad (1)$$

यदि $p(a) = 0$, तो

$$p(x) = (x - a)\, q(x),$$

और इससे ज्ञात होता है $x - a$, $p(x)$का एक गुणनखंड है। दूसरी ओर यदि $x - a$, $p(x)$ का गुणनखंड हो, तो किसी बहुपद $g(x)$ के लिए

$$p(x) = (x - a)\, g(x), \qquad (2)$$

होगा। इस स्थिति में (2) के प्रयोग से $p(x)$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल होगा

$$p(a) = (a - a)\, g(a) = 0,$$

इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

प्रमेय 2.2 (गुणनखंड प्रमेय) : *यदि $p(x)$ घात $n > 1$ वाला बहुपद हो और a कोई वास्तविक संख्या हो, तो*

(i) *$p(a) = 0$ होने पर $(x - a)$, $p(x)$ का गुणनखंड होगा।*

(ii) *$(x - a)$ के $p(x)$ का गुणनखंड होने पर $p(a) = 0$ होगा।*

टिप्पणी : यह प्रमेय घात 1 वाले बहुपदों के लिए भी मान्य है। परन्तु यह कोई रोचक स्थिति नहीं है क्योंकि इस स्थिति में $q(x)$ का घात शून्य होता है। वास्तव में ऊपर समता (1) से

$$\text{घात } p(x) = \text{घात } \{(x - a)\, q(x)\}$$
$$= \text{घात } (x - a) + \text{घात } q(x)$$
$$= 1 + \text{घात } q(x)$$

इसका अर्थ हुआ कि

$$\text{घात } q(x) = \text{घात } p(x) - 1$$

जिससे कि $p(x)$ की घात 1 होने के कारण घात $q(x) = 0$

उदाहरण 30 : निश्चित कीजिए कि $x-3$ बहुपद

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$$

का गुणनखंड है अथवा नहीं।

हल : गुणनखंड प्रमेय के कारण $x-3$ को $p(x)$ का गुणनखंड होने के लिए आवश्यक होगा की $p(3) = 0$ हो। अब

$$\begin{aligned} p(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 12 \\ &= 27 - 27 + 12 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

फलत: $x-3$ दिए गए बहुपद का गुणनखंड है।

उदाहरण 31 : यदि $x-a$ बहुपद

$$p(x) = x^3 - (a^2 - 1)\, x + 2$$

का गुणनखंड हो, तो a का मान निकालिए।

हल : क्योंकि $x-a, p(x)$ का गुणनखंड है, अत: गुणनखंड प्रमेय से

$$p(a) = 0$$

या $\quad a^3 - (a^2 - 1)\, a + 2 = 0$

या $\quad a = -2$

उदाहरण 32 : गुणनखंड प्रमेय के प्रयोग द्वारा $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ के गुणनखंडन के लिए गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं। यदि हम दिए गए व्यंजक में $x = -(y+z)$ रखें, तो हमें प्राप्त होगा :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= -(y+z)^3 + y^3 + z^3 + 3yz\,(y+z) \\ &= -(y+z)^3 + (y+z)^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

अतः $x-\{-(y+z)\}$, अर्थात् $(x+y+z)$ दिए गए व्यंजक का गुणनखंड है। अब जब हमें यह ज्ञात हो गया कि $x+y+z$ व्यंजक $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का गुणनखंड है, तो हम दूसरा गुणनखंड $[x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy]$ दीर्घ भाजन की विधि से सरलता से प्राप्त कर सकते हैं।

प्रश्नावली 2.4

1. शेषफल बताइए जब $4x^3-3x^2+2x-4$ को भाग दिया जाता है :

   (a) $x-1$ से (b) $x-2$ से (c) $x+1$ से

   (d) $x-4$ से (e) $x+2$ से (f) $x+\frac{1}{2}$ से

2. गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग कर यह बताइए कि क्या $x-1$ निम्न का गुणनखंड है :

   (a) x^3+8x^2-7x-2 (b) $x^3-27x^2+8x+18$

   (c) x^3+x^2-2x+1 (d) $8x^4-12x^3+18x+14$

   (e) $2\sqrt{2}x^3+5\sqrt{2}x^2-7\sqrt{2}$ (f) $8x^4+12x^3-18x+14$

3. गुणनखंड प्रमेय का प्रयोग कर यह निश्चित कीजिए कि क्या $g(x)$, $f(x)$ का गुणनखंड है।

   (a) $f(x)=x^3-3x^2+4x-4,\ g(x)=x-2$

   (b) $f(x)=2x^3+4x+6,\ g(x)=x+1$

   (c) $f(x)=x^3+x^2+3x+175,\ g(x)=x+5$

   (d) $f(x)=x^3-3x^2+4x-12,\ g(x)=x+3$

   (e) $f(x)=7x^2-2\sqrt{8}x-6,\ g(x)=x-\sqrt{2}$

   (f) $f(x)=2\sqrt{2}x^2+5x+\sqrt{2},\ g(x)=x+\sqrt{2}$

4. यदि $x-2$ निम्नलिखित में से प्रत्येक बहुपद का गुणनखंड हो, तो प्रत्येक के लिए a का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $x^2-3x+5a$

   (b) x^3-2ax^2+ax-1

   (c) $x^5-3x^4-ax^3+3ax^2+2ax+4$

5. a का मान निकालिए यदि $x + a$ निम्न बहुपद का गुणनखंड हो :

(a) $x^3 + ax^2 - 2x + a + 4$

(b) $x^4 - a^2x^2 + 3x - 6a$

6. a का मान ज्ञात कीजिए यदि $x - a$ निम्न बहुपद का गुणनखंड हो :

(a) $x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + 3x - a + 2$

(b) $x^5 - a^2x^3 + 2x + a + 1$

2.7 बहुपदों का गुणनखंडन

आप पहले ही सीख चुके हैं कि नीचे दिए गए रूप वाले द्विघाती बहुपदों का गुणनखंडन कैसे किया जाता है :

(a) $x^2 - a^2$ (b) $x^2 + 2ax + a^2$

(c) $x^2 - 2ax + a^2$ (d) $ax^2 + bx + c$

(e) $x^2 + (a + b)x + ab$

आप यह भी सीख चुके हैं कि नीचे दिए गए रूप वाले त्रिघाती बहुपदों का गुणनखंडन कैसे किया जाता है :

(a) $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (b) $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

(c) $x^3 + a^3$ (d) $x^3 - a^3$

अब हम गुणनखंड प्रमेय और शेषफल प्रमेय के प्रयोग द्वारा त्रिघाती बहुपदों का गुणनखंडन करना सीखेंगे। युक्ति यह लगाई जाएगी कि इन प्रमेयों के प्रयोग से दिए गए बहुपद $p(x)$ का एक रैखिक गुणनखंड $x - a$ निकाल लिया जाए। इसके बाद लिखा जाए

$$p(x) = (x - a)\, q(x)$$

$q(x)$ की घात $p(x)$ की घात से एक कम है। अतः $q(x)$ द्विघाती बहुपद है। अब पहले बताई गई विधियों से $q(x)$ का गुणनखंडन किया जा सकता है। या फिर हम $p(x)$ का कोई रैखिक गुणनखंड $x - b$ खोजने का प्रयास कर सकते हैं। तब

$$p(x) = (x - a)\,(x - b)\, g(x)$$

जहाँ $g(x)$ की घात $q(x)$ की घात से एक कम है। फलतः $g(x)$ की घात एक है।

तात्पर्य यह कि अब $p(x)$ को रैखिक गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर दिया गया है। आइए अब उदाहरणों द्वारा इस विधि पर प्रकाश डालें।

उदाहरण 33 : $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : दिए गए बहुपद को $p(x)$ लिखने पर

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$$

अब $x - a$ रूप का एक रैखिक गुणनखंड खोजते हैं। हम देखते हैं कि $p(x)$ के गुणांकों का योग शून्य है। फलतः $p(1) = 0$ और इसलिए $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

यदि हम $p(x)$ को $x - 1$ से भाग दें, तो दूसरा गुणनखंड $2x^2 - 3x - 2$ प्राप्त होता है। (आप चाहें तो दीर्घ भाजन विधि का प्रयोग करें और चाहें तो उदाहरण 25 के वैकल्पिक हल में समझाई गई विधि का।) $2x^2 - 3x - 2$ का गुणनखंडन करने के लिए हम मध्य पद को बाँटने की विधि का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हम दो संख्याएँ u और v ऐसी निकालेंगे कि

$$u + v = -3, uv = -4$$

स्पष्ट है कि हम $u = -4$ और $v = 1$ ले सकते हैं। तब

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$$

फलतः $p(x) = (x - 1)(2x + 1)(x - 2)$

टिप्पणी : ऊपर द्विघाती गुणनखंड $2x^2 - 3x - 2$ प्राप्त करने के बाद हम देख सकते थे कि यह $x = 2$ के लिए शून्य हो जाता है। अतः $x - 2$ इस बहुपद का गुणनखंड है। दूसरा गुणनखंड $2x + 1$ अब आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 34 : $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : गुणनखंड $x - a$ निकालने के लिए a के मान का अनुमान करना है। पहले हम

$$a = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

आदि लेकर देखेंगे। ध्यान दीजिए कि दिए गए बहुपद में सभी गुणांक धनात्मक हैं। अतः 1, 2, 3 को तो तुरन्त निरस्त (reject) किया जा सकता है। वास्तव में a का

कोई भी धनात्मक मान तो काम देगा ही नहीं क्योंकि ऐसे मान के लिए $p(a)$ धनात्मक होगा, शून्य नहीं। अतः $p(x)$ का परिकलन हम केवल ऋणात्मक मानों के लिए ही करेंगे। अब हम देखते हैं कि

$$p(-1) = p(-2) = p(-3) = 0$$

यह बड़ी अच्छी स्थिति है। हमें $p(x)$ के तीनों रैखिक गुणनखंड मिल गए। यह गुणनखंड निश्चय ही

$$x - (-1),\ x - (-2)\ \ x - (-3)$$

या $\quad x + 1, \quad x + 2, \quad x + 3$

हैं। क्योंकि x^3 का गुणांक 1 है, अत:

$$p(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

उदाहरण 35 : $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : यहाँ x^3 का गुणांक 1 है। इसलिए यदि दिए गए बहुपद, कहिए $p(x)$, के तीन रैखिक गुणनखंड किए जा सकते हैं तो यह $x - a, x - b, x - c$ के रूप में होंगे और

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

होगा। इसका अर्थ यह हुआ कि $p(x)$ का अचर पद $-abc$ होगा। $p(x)$ का अचर पद -5 है। अत:

$$-abc = -5, \text{ या } abc = 5$$

इस प्रकार $a, b,$ और c तीनों ही 5 के गुणनखंड हैं। अत: इनके सम्भव मान हैं:

$$\pm 1 \text{ और } \pm 5$$

परिकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$p(1) \neq 0, p(-1) = 0, p(5) = 0, p(-5) \neq 0$$

इसलिए $x + 1$ और $x - 5$, $p(x)$ के गुणनखंडों में से दो हैं।

इस प्रकार, किसी रैखिक गुणनखंड $q(x)$ के लिए

$$p(x) = (x + 1)(x - 5)\, q(x)$$
$$= (x^2 - 4x - 5)\, q(x)$$

अब देखते हैं कि $q(x)$ क्या है। $q(x)$ ज्ञात करने के लिए हम $p(x)$ में से गुणनखंड $(x^2 - 4x - 5)$ निकालने का प्रयास करेंगे।

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \\ &= x(x^2 - 4x - 5) + x^2 - 4x - 5 \\ &= (x^2 - 4x - 5)(x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 5)(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 (x - 5) \\ &= (x + 1)(x + 1)(x - 5) \end{aligned}$$

प्रश्नावली 2.5

1. निम्नलिखित व्यंजकों का गुणनखंडन कीजिए जब कि दिया गया है :

   (a) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$, $(x + 2)$ एक गुणनखंड है।

   (b) $4x^3 + 20x^2 + 33x + 18$, $(2x + 3)$ एक गुणनखंड है।

   (c) $9z^3 - 27z^2 - 100z + 300$, $(3z + 10)$ एक गुणनखंड है।

   (d) $x^3 + 13x^2 + 31x - 45$, $(x + 9)$ एक गुणनखंड है।

2. गुणनखंडन कीजिए :

   (a) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

   (b) $y^3 - 7y + 6$

   (c) $x^3 - 10x^2 - 53x - 42$

   (d) $x^3 + 13x^2 + 31x - 45$

   (e) $y^3 - 2y^2 - 29y - 42$

   (f) $2y^3 - 5y^2 - 19y + 42$

   (g) $3u^3 - 4u^2 - 12u + 16$

अध्याय 3

अनुपात तथा समानुपात

3.1 प्रस्तावना

आप पिछली कक्षाओं में *अनुपात* (ratio) एवं *समानुपात* (proportion) के विषय में पढ़ चुके हैं। जैसा कि आप जानते हैं, प्रतिशत, लाभ और हानि, काम और समय, समय और दूरी आदि से सम्बन्धित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में अनुपात और समानुपात की संकल्पनाओं का प्रयोग किया जाता है। इस अध्याय में इनके बारे में अधिक जानकारी प्राप्त की जाएगी। इन दोनों संकल्पनाओं का प्रयोग परिमेय व्यंजकों को सरल करने में और कुछ समीकरणों को हल करने में किया जाएगा।

3.2 अनुपात

मान लीजिए कि एक कि.ग्रा. टमाटरों का मूल्य 16 रु. और 1 कि.ग्रा. आलुओं का मूल्य 8 रु. है। क्या 1 कि.ग्रा. टमाटरों और इतने ही भार के आलुओं के मूल्य में कोई संबंध है? निश्चय ही इनमें एक संबंध है। पहला (टमाटरों का मूल्य) दूसरे (आलुओं के मूल्य) का दोगुना (2 गुना) है, या कहिए कि दूसरा पहले का आधा ($\frac{1}{2}$ गुना) है। इस संबंध में कोई अंतर नहीं आएगा चाहे हम दोनों का भार एक कि.ग्रा. से बदलकर 100 ग्रा. ही क्यों न कर दें। यदि हम दोनों का भार 1 कि.ग्रा. के स्थान पर 5 कि.ग्रा. (या कुछ और) कर दें तो भी इस संबंध में कुछ अंतर नहीं पड़ता। याद कीजिए कि किसी समान प्रकार की दो राशियों की तुलना करने से ऊपर जैसा जो संबंध आता है, उसे *अनुपात* कहते हैं। अनुपात ऐसी मात्रा को व्यक्त करता है जो यह बताए कि एक राशि अपने जैसी किसी दूसरी राशि का कितने गुना या कौन सा भाग है। उदाहरणतः 25 पैसे एक रुपए का चौथा ($\frac{1}{4}$वाँ)

भाग है। अत: 25 पैसे का एक रुपए अर्थात् 100 पैसे से अनुपात $\frac{1}{4}$ है। हम इस अनुपात को $1:4$ लिखते हैं। क्योंकि 5 रुपए की राशि 1 रु. की राशि का 5 गुना है, अत: 5 रु. का 1 रु. से अनुपात $\frac{5}{1}$ या $5:1$ है।

अनुपातों सें सम्बन्धित कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. *अनुपात के पद* (terms) : अनुपात $a:b$ में संख्याएँ a और b अनुपात के पद कहलाती हैं। संख्या a अनुपात का पहला पद और b अनुपात का दूसरा पद कहलाती है।

2. *अनुपात की प्रकृति* (nature) : अनुपात एक शुद्ध संख्या है; इसके साथ कोई इकाई (unit) नहीं जुड़ी होती।

3. *अनुपातों की तुलना* (comparison) : क्योंकि अनुपात $a:b$ यह बतलाता है कि a, b का कितने गुना या कौन सा भाग है, अत: यह $\frac{a}{b}$ के भी बराबर है। इसलिए अनुपात $a:b$ किसी अन्य अनुपात $c:d$ से तब बड़ा कहलाता है जब

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \; (b \text{ और } d > 0)$$

या,
$$ad - bc > 0$$

4. *अनुपात का सरलतम रूप* (simplest form) : क्योंकि प्रत्येक शून्येतर संख्या m के लिए $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$, अत: अनुपात $a:b$ और $ma:mb$ बराबर है। यदि $\frac{a}{b}$ अपने न्यूनतम पदों (lowest terms) में है तो हम कहते हैं कि अनुपात $a:b$ अपने सरलतम रूप में या न्यूनतम पदों में है। प्राय: अनुपातों को इनके सरलतम रूप में लिखा जाता है।

5. *अनुपातों का मिश्रण* (composition) : दो या दो से अधिक अनुपातों का मिश्रण (compounding) किया जा सकता है। उदाहरणत:

   (i) $3:4$ और $5:7$ का मिश्र अनुपात $3 \times 5 : 4 \times 7$ है।

   (ii) $a:b$ और $c:d$ का मिश्रित अनुपात $a \times c : b \times d$ है।

टिप्पणी : क्योंकि $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$ जब तक कि $a = b$ न हो, सामान्य रूप से अनुपात $a : b$ और $b : a$ भिन्न-भिन्न होते हैं। उदाहरणतः अनुपात $3 : 4$ तो $\frac{3}{4}$ है जबकि अनुपात $\frac{4}{3}$ है, और निश्चय ही $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3}$।

उदाहरण 1 : यदि $x : y = 2 : 5$ तो बतलाइए कि अनुपात $10x + 3y : 5x + 2y$ क्या होगा।

हल : क्योंकि अनुपात $x : y$ संख्या $\frac{x}{y}$ के अलावा कुछ नहीं, अतः स्पष्ट है कि $y \neq 0$ होगा।

(याद कीजिए कि शून्य से भाग नहीं दे सकते।) जैसा कि दिया हुआ है,

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \qquad (1)$$

अब

$$\frac{10x + 3y}{5x + 2y} = \frac{10\frac{x}{y} + 3}{5\frac{x}{y} + 2} \quad \text{[अंश और हर को } y \text{ से भाग देकर]}$$

$$= \frac{(10 \times \frac{2}{5} + 3)}{(5 \times \frac{2}{5} + 2)} \quad \text{[(1) से } \frac{x}{y} \text{ का मान रखने पर]}$$

$$= \frac{7}{4}$$

इस प्रकार $10x + 3y : 5x + 2y = 7 : 4$

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए कि यदि

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} ,$$

तो इनमें से प्रत्येक

$$\frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}$$

के बराबर भी होगा।

हल : माना कि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, जिससे कि

$$a = kb,\ c = kd \text{ and } e = kf. \tag{1}$$

यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि

$$\frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}=k$$

(1) से a, c और e का मान लेने पर,

$$\frac{la+mc+ne}{lb+md+nf}=\frac{lkb+mkd+nkf}{lb+md+nf}=\frac{k(lb+md+nf)}{lb+md+nf}=k.$$

अत: इच्छित परिणाम प्राप्त हुआ।

टिप्पणी : ऊपर के उदाहरण की भाँति, यह दिखाया जा सकता है कि यदि

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ \ldots,$$

तो इनमें से प्रत्येक

$$\frac{la+mc+ne+\ldots}{lb+md+nf+\ldots}$$

उदाहरण 3 : यदि $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$$

हल : वाम पक्ष में $l = m = n = 1$ लेने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=\frac{x+y+z}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}$$

$$= \frac{(x+y+z)}{(a+b+c)} \qquad (1)$$

दायें पक्ष के संबंध से $l = y+z, m = z+x,$ और $n = x+y$ लेने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(b+c-a)(y+z)+(c+a-b)(z+x)+(a+b-c)(x+y)}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{\{(c+a-b)+(a+b-c)\}x+\{(b+c-a)+(a+b-c)\}y+\{b+c-a)+(c+a-b)\}z}$$

(हर में x, y और z के गुणांक इकट्ठे करने पर),

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2ax+2by+2cz}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)} \qquad (2)$$

(1) और (2) से, इच्छित सम्बंध सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4 : यदि $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{(x+y)+(a+b)}$$

हल : माना कि $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k,$ जिससे कि $x = ka, y = kb$ हुआ। अब

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}=\frac{k^2a^2+a^2}{ka+a}=\frac{(k^2+1)a}{k+1} \qquad (1)$$

इसी प्रकार

$$\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(k^2+1)b}{k+1} \qquad (2)$$

(1) और (2) से

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(k^2+1)a}{k+1}+\frac{(k^2+1)b}{k+1}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b)}{k+1} \qquad (3)$$

पुन:

$$\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{(x+y)+(a+b)}=\frac{(ka+kb)^2+(a+b)^2}{ka+kb+(a+b)}$$. (क्योंकि $x=ka$ और $y=kb$)

$$=\frac{k^2(a+b)^2+(a+b)^2}{k(a+b)+(a+b)}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b)^2}{(k+1)(a+b)}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b)}{k+1} \qquad (4)$$

प्रश्नावली 3.1

1. ज्ञात कीजिये कौन सा अनुपात बड़ा है :

   (i) 2 : 3 या 3 : 4 (ii) 5 : 7 या 7: 9 (iii) 1 : 4 या 2 : 9

2. दोनों में से बड़ा अनुपात ज्ञात कीजिये

   (i) 2 : 3 और 3 : 4 (ii) 5 : 7 और 7 : 9 (iii) 1 : 4 और 2 : 9

3. x का मान ज्ञात कीजिये जिससे कि

   (i) $x+7 : x+4 = 3 : 2$ (ii) $5x+15 : 2x+3 = 10 : 3$ (iii) $5x+1 : 2x+3 = 1 : 2$

4. यदि $x : y = 2 : 3$, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये।

   (i) $3x + 2y : 9x + 5y$ (ii) $6x + 7y : 12x + 5y$

5. यदि $2x + 3y : 3x + 5y = 18 : 29$, तो $x : y$ ज्ञात कीजिये।

6. दो संख्याओं का अनुपात 1:2 है। यदि प्रत्येक में 4 जोड़ दिया जाए तो अनुपात 2:3 हो जाता है। संख्याएं ज्ञात कीजिये।

7. दो संख्याओं का अनुपात 3:4 है। यदि प्रत्येक में से 8 घटा दिया जाए तो अनुपात 2:3 हो जाता है। संख्याएं ज्ञात कीजिये।

8. अनुपात 2:5 के प्रत्येक पद में कौन सी संख्या जोड़ी जाए कि अनुपात 5:6 हो जाए?

3.3 समानुपात

याद कीजिए कि दो समान अनुपातों से एक समानुपात बनता है। इस प्रकार यदि $a : b = c : d$, तो a, b, c, d को समानुपाती (proportion) कहा जाता है। इसे $a : b :: c : d$ लिखा जाता है।इसे इस प्रकार पढ़ा जाता है "कि a और b का अनुपात वही है जो c और d का" है। a और d को *सिरों के पद* (extremes) तथा b और c को *मध्य के पद* (mean) कहते है। पद d को a, b, c का *चतुर्थानुपती* (fourth proportional) कहते हैं।

दृष्टांत : 2:3 = 14:21

यहां 2, 3, 14, 21 समानुपात में हैं। दूसरे शब्दों में 2:3::14:21। यहां 2 और 21 सिरों के पद तथा 3 और 14 मध्य पद हैं। साथ ही 21 को 2, 3 और 14 का चतुर्थानुपाती कहते हैं।

राशियाँ a, b, c *वितत समानुपात* (continued proportion) में कहलाती हैं यदि

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots, \text{ अर्थात् } a : b = b : c = c : d = \ldots$$

यदि a, b और c वितत समानुपात में हों, अर्थात् $a : b :: b : c$, तो b को a और c का *मध्यानुपाती* (mean proportional) कहा जाता है और c को a और b का *तृतीयानुपाती* (third proportional) कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि यदि a, b और c वितत समानुपात में हों, तो $ac = b^2$ होता है। फलतः

यदि तीन राशियाँ वितत समानुपात में हों तो सिरे के पदों का गुणनफल मध्य पद का वर्ग होता है।

उदाहरण 5 : यदि 2, b और 8 वितत समानुपात में हों तो, b का मान बतलाइए।

हल : क्योंकि 2, b और 8 वितत समानुपात में है,

अतः $\frac{2}{b}=\frac{b}{8}$

या $16 = b^2$

फलतः $b = 4$

टिप्पणी : क्योंकि अनुपात धन संख्याओं में लिया जाता है, अतः ऊपर 16 का केवल धन वर्गमूल ही लिया गया है।

उदाहरण 6 : 2 और 4 का तृतीयानुपाती निकालिए।

हल : माना कि 2 और 4 का तृतीयानुपाती c है। अब क्योंकि 2, 4 और c वितत समानुपात में हैं, अतः

$$\frac{2}{4}=\frac{4}{c}$$

फलतः $c = 8$

अतः 2 और 4 का तृतीयानुपाती 8 है।

उदाहरण 7 : तीन, राशियाँ a, b, c वितत समानुपात में हैं। यदि $ac = 25$ हो तो b का मान बतलाइए।

हल : क्योंकि $ac = b^2$

अतः $25 = b^2$

फलतः $b = 5$

उदाहरण 8 : 32 और 2 का मध्यानुपाती निकालिए।

हल : माना कि 32 और 2 का मध्यानुपाती b है।

तब $b^2 = 32 \times 2 = 64$

फलत: $b = 8$

इस प्रकार 32 और 2 का मध्यानुपाती 8 है।

3.4 कुछ लाभप्रद संबंध

ध्यान दीजिए कि यदि $a : b :: c : d$ अर्थात् $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, तो $ad = bc.$

इस प्रकार सिरे के पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है। यह संबंध बहुत महत्त्वपूर्ण है क्योंकि यह इस बात का निर्णय करने में हमारी सहायता करता है कि a, b, c, d समानुपाती हैं या नहीं।

दृष्टांत : संख्याएँ 3, 7, 8, 12 समानुपात में नहीं हैं क्योंकि $3 \times 12 \neq 7 \times 8$। संख्याएँ 4, 5, 8, 10 समानुपात में हैं क्योंकि $4 \times 10 = 5 \times 8$ है।

उदाहरण 9 : 14, 8, 7 का चतुर्थानुपाती निकालिए।

हल : माना कि 14, 8, 7, का चतुर्थानुपाती x है।

तब $14 : 8 :: 7 : x$

या $14 \times x = 8 \times 7 = 56$ (सिरे के पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल)

या $x = 4$

फलत: 14, 8, 7 का चतुर्थानुपाती 4 है।

उदाहरण 10 : वह संख्या निकालिए जिसे 4, 10, 12, 24 में से प्रत्येक में जोड़ने से परिणामी संख्याएँ समानुपात में हो जाएँ।

हल : माना कि अभीष्ट संख्या x है। तब $4 + x : 10 + x :: 12 + x : 24 + x$

या $(4 + x)(24 + x) = (10 + x)(12 + x)$
(सिरे के पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल)

या, $96 + 28x + x^2 = 120 + 22x + x^2$

या, $96 + 28x = 120 + 22x$

या, $6x = 24$

या, $x = 4$

अत : दी हुई संख्याओं में 4 जोड़ने पर वे समानुपात में हो जाएँगी।

[illegible] : दी हुई संख्याओं में 4 जोड़कर सत्यापित कीजिए कि नई संख्याएँ समानुपात में हैं। ऊपर के संबंध (1) की वास्तविक महत्ता इस बात में है कि इस संबंध से हम कई अन्य महत्वपूर्ण संबंध निकाल सकते हैं। इन संबंधों से हमें व्यावहारिक समस्याओं के हल में सहायता मिलती है।

1. यदि $a : b :: c : d$, तो $b : a :: d : c$

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ से $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ प्राप्त होता है। यह संक्रिया *व्युत्क्रमानुपात* (invertendo) कहलाती है। इसका तात्पर्य है कि यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो व्युत्क्रम में लेने पर भी यह समानुपात में ही रहती हैं।

2. यदि $a : b :: c : d$, तो $a : c :: b : d$

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ से $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ प्राप्त होता है। यह संक्रिया *एकांतरानुपात* (alternendo) कहलाती है। इससे तात्पर्य यह है कि यदि चार राशियाँ समानुपात में हों तो एकांतर में लेने पर भी यह समानुपात में ही रहती हैं।

3. यदि $a : b :: c : d$ तो $(a + b) : b :: (c + d) : d$

   दिया गया है कि

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ अत: } \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \text{ या } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

   इस संक्रिया को *योगानुपात* (componendo) कहते हैं।

4. यदि $a : b :: c : d$, तो $(a - b) : b :: (c - d) : d$

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ अत: } \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \text{ या } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

   इस संक्रिया को *अन्तरानुपात* (dividendo) कहते हैं।

5. यदि $a : b :: c : d$, तो $(a + b) : (a - b) :: (c + d) : (c - d)$.

योगानुपात और अंतरानुपात का उपयोग करते हुए, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (1)$$

तथा

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (2)$$

(1) और (2) के क्रमशः पक्षों को विभाजित करते हुए, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

इस संक्रिया को *योगांतरानुपात* कहते हैं।

उदाहरण 11 : यदि $a : b :: c : d$, तो दर्शाइये $5a + 7b : 5a - 7b :: 5c + 7d : 5c - 7d$

हल : हमें दिया है

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

दोनों पक्षों को $\frac{5}{7}$ से गुणा करने पर

$$\frac{5a}{7b} = \frac{5c}{7d}$$

योगांतरानुपात की सहायता से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{5a+7b}{5a-7b} = \frac{5c+7d}{5c-7d}$$

या $\quad 5a + 7b : 5a - 7b :: 5c + 7d : 5c - 7d.$

वैकल्पिक हल : उदाहरण 2 की विधि अपनाइए।

उदाहरण 12 : यदि $3a + 8b : 3c + 8d :: 3a - 8b : 3c - 8d$, तो दिखलाइए कि a, b, c, d समानुपात में हैं।

हल : जैसा कि दिया हुआ है,

$$\frac{3a+8b}{3c+8d}=\frac{3a-8b}{3c-8d}$$

या, $$\frac{3a+8b}{3a-8d}=\frac{3c+8d}{3c-8d}$$

योगांतरानुपात के प्रयोग से

$$\frac{(3a+8b)+(3a-8b)}{(3a+8b)-(3a-8b)}=\frac{(3c+8d)+(3c-8d)}{(3c+8d)-(3c-8d)}$$

या, $$\frac{6a}{16b}=\frac{6c}{16d}$$

या, $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

अर्थात a, b, c, d समानुपात में हैं।

उदाहरण 13 : यदि $x=\frac{2ab}{a+b}$ हो तो $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}$ का मान निकालिए।

हल : क्योंकि $x=\frac{2ab}{a+b}$,

अतः $$\frac{x}{a}=\frac{2b}{a+b} \qquad (1)$$

(1) के पदों पर योगांतरानुपात लगाने से

$$\frac{x+a}{x-a}=\frac{2b+(a+b)}{2b-(a+b)}$$

या $$\frac{x+a}{x-a}=\frac{a+3b}{b-a} \qquad (2)$$

इसी प्रकार $$\frac{x+b}{x-b}=\frac{3a+b}{a-b} \qquad (3)$$

(2) और (3) के संगत पक्षों का योग करने पर

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a+3b}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}$$

$$=\frac{2(b-a)}{b-a}$$

$$=2$$

अत : $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}$ का मान 2 है।

उदाहरण 14 : $\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}=3$ को हल कीजिए।

हल : हम दिए हुए समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}=\frac{3}{1}$$

योगांतरानुपात के प्रयोग से

$$\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}=\frac{3+1}{3-1}$$

या $$\frac{2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2+x}}=2,$$

वर्ग करने पर

$$\frac{2-x}{2+x}=4=\frac{4}{1}$$

पुनः योगांतरानुपात से,

$$\frac{(2-x)+(2+x)}{(2-x)-(2+x)}=\frac{4+1}{4-1}$$

अतः $\frac{4}{-2x}=\frac{5}{3}$

या, $x=-\frac{6}{5}$

प्रश्नावली 3.2

1. a का वह मान निकालिए जिसके लिए

   (i) $a:4::5:10$ (ii) $3:a::7:14$ (iii) $4:a::a:9$.

2. निम्नलिखित का चतुर्थानुपाती निकालिए :

   (i) 3, 12 और 15 (ii) 6, 12 और 14 (iii) 8, 12 और 12.

3. निम्नलिखित का तृतीयानुपाती निकालिए :

   (i) 12, 6 (ii) 16, 8 (iii) 18, 12

4. निम्नलिखित का मध्यानुपाती निकालिए :

   (i) 24 और 6 (ii) 32 और 8 (iii) 36 और 16

5. व्युत्क्रमानुपात लगाकर परिणाम लिखिए :

   (i) $2:3::8:12$ (ii) $b:p::q:c$ (iii) $5:r::t:9$.

6. एकांतरानुपात लगाकर परिणाम लिखिए :

   (i) $2:3::10:15$ (ii) $b:p::q:c$ (iii) $5:r::t:9$.

7. योगानुपात लगाकर परिणाम लिखिए :

   (i) $12:3::4:1$ (ii) $b:p::q:c$ (iii) $15:r::k:9$.

8. अंतरानुपात लगाकर परिणाम लिखिए :

   (i) $8:3::16:6$ (ii) $b:p::q:c$ (iii) $5:2::t:9$.

9. योगांतरानुपात लगाकर परिणाम लिखिए :

   (i) $2:3::8:12$ (ii) $b:p::q:c$ (iii) $5:r::t:9$.

10. यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, तो सिद्ध कीजिए कि इनमें से प्रत्येक अनुपात निम्न के बराबर है

(i) $\frac{2a+3c+4e}{2b+3d+4f}$ (ii) $\frac{a-4c+e}{b-4d+f}$ (iii) $\frac{5a-c-2e}{5b-d-2f}$

11. सिद्ध कीजिए कि a, b, c, d समापनुपात में होंगे यदि

(i) $6a + 7b : 6c + 7d :: 6a - 7b : 6c - 7d$

(ii) $2a^2 + 3b^2 : 2c^2 + 3d^2 :: 2a^2 - 3b^2 : 2c^2 - 3d^2$

[संकेत : यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$]

(iii) $(a + b + c + d) \times (a - b - c + d) = (a + b - c - d)(a - b + c - d)$

12. यदि $(a - 2b - 3c + 4d)(a + 2b + 3c + 4d) = (a + 2b - 3c - 4d)(a - 2b + 3c - 4d)$ तो दिखलाइए कि $2ad = 3bc$.

[संकेत : दिखलाइए कि $a, b, 3c, 2d$ समानुपाती हैं।]

13. यदि $x=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ तो $\frac{x+2\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}+\frac{x+2\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}$ का मान निकालिए।

[संकेत : x के दिए गए मान से $\frac{x}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ प्राप्त होता हैं। अब योगांतरानुपात लगाइए।]

14. यदि $x=\frac{6pq}{p+q}$ तो $\frac{x+3p}{x-3p}+\frac{x+3q}{x-3q}$ का मान निकालिए।

[संकेत : $\frac{x}{3p}=\frac{2q}{p+q}$]

15. निम्नलिखित समीकरणों में x का मान निकालिए।

(i) $\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=\frac{341}{91}$

(ii) $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-10}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-10}}=\frac{5}{2}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{4x-1}{2}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=5$

अध्याय 4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

4.1 भूमिका

आपको विदित है कि एक चर वाले रैखिक समीकरण (linear equations) कैसे हल किए जाते हैं। अब एक तो एक चर वाले समीकरणों के स्थान पर हम दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन करेंगे, और दूसरे रैखिक समीकरणों को लेखाचित्रों द्वारा व्यक्त करना भी सीखेंगे।

रैखिक समीकरणों को लेखाचित्रों में व्यक्त करने के लिए हम समतल के किसी बिन्दु को निर्देशांकों द्वारा व्यक्त करने की धारणा पर विचार करेंगे। यह धारणा बीजगणित और ज्यामिति को आपस में जोड़ती है। फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने देकार्त (Rene Descartes) ने जब यह धारणा प्रस्तुत की तो गणित के क्षेत्र में अभूतपूर्व प्रगति हुई।

4.2 एक चर वाले रैखिक समीकरण : पुनरावलोकन

याद कीजिए कि *समीकरण* ऐसी समिका को कहते हैं जिसमें एक या एक से अधिक अज्ञात राशियाँ, जिन्हें चर कहते हैं, आती हों। *कोई समीकरण उस दशा में एक चर वाला रैखिक समीकरण या एक चर में एक घात वाला समीकरण कहलाता है जब इसमें केवल एक ही चर हो और इस चर का घात* 1 *हो।* उदाहरणत: नीचे दिए गए सभी समीकरण एक चर वाले रैखिक समीकरण है!

$$2x + 3 = 4,\ x + 2 = 3x - 9,\ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = \sqrt{2}\,y - 5,\ y + 2 = 0$$

निम्नलिखित में से कोई भी एक चर वाला रैखिक समीकरण नहीं हैं।

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0), x^2 - 1 = 9x^2 - 10, 2x + 3 = 4x^2, x + y = 2$$

4.3 एक चर वाले रैखिक समीकरण का हल

चर का ऐसा मान (वास्तविक संख्या) जिसके लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हो जाएँ, समीकरण का हल कहलाता है। उदाहरण के लिए, जब हम समीकरण $3x - 5 = x - 1$ में x के लिए 2 लिखते हैं तो हमें प्राप्त होता है :

बायाँ पक्ष $= 3x - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$, दायाँ पक्ष $= x - 1 = 2 - 1 = 1$

क्योंकि $1x = 2$ के लिए बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष (दोनों $= 1$) , अत: '2' समीकरण $3x - 5 = x - 1$ का हल है। समीकरण के 'हल ज्ञात करने' की क्रिया में निम्नलिखित सरल गुणधर्मों का प्रयोग किया जाता है:

(a) समिका के दोनों पक्षों में वही राशि जोड़ने पर समिका नहीं बदलती।

(b) समिका के दोनों पक्षों में से वही राशि घटाने पर समिका नहीं बदलती।

(c) समिका के दोनों पक्षों को उसी शून्येतर राशि से गुणा या भाग करने पर समिका नहीं बदलती।

उदाहरण 1 : समीकरण $24x + 8 = 12x + 40$ को हल कीजिए।

हल : समीकरण के दोनों पक्षों को 4 से भाग देने पर समीकरण बन जाता है

$$6x + 2 = 3x + 10. \quad (1)$$

दोनों पक्षों में से 2 घटाने पर प्राप्त होता है

$$6x = 3x + 8. \quad (2)$$

दोनों पक्षों में $-3x$ जोड़ने पर (या $3x$ घटाने पर) प्राप्त होता है

$$3x = 8 \quad (3)$$

दोनों पक्षों को $\frac{1}{3}$ से गुणा करने पर (अर्थात 3 से भाग देने पर) प्राप्त होता है

$$x = \frac{8}{3} \quad (4)$$

ऊपर बताए गए गुणधर्मों (a) से (c) के कारण समिकाएँ (1) से (4) दिए गए समीकरण के तुल्य हैं। फलत: $\frac{8}{3}$ दिए हुए समीकरण का हल है।

टिप्पणियाँ :

1. हम दिए हुए समीकरण के दोनों पक्षों में $x = \frac{8}{3}$ रखकर हल की सत्यता जाँच सकते हैं। हम पाते हैं कि $x = \frac{8}{3}$ के लिए बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष = 72 है। अत: $\frac{8}{3}$ दिए हुए समीकरण का हल है।

2. ध्यान दीजिए कि समीकरण (2) के दोनों पक्षों में $-3x$ जोड़ने का प्रभाव यह हुआ कि बायाँ पक्ष का $6x$ तो $6x-3x$ बन गया और दायाँ पक्ष का $3x$, $3x-3x = 0$ बन गया। इस प्रकार, $3x$ दायाँ पक्ष से लुप्त होकर बायाँ पक्ष में बदले हुए चित्रों के साथ उत्पन्न हुआ। एक पक्ष से एक पद के लुप्त होकर इसका दूसरे पक्ष में बदले हुए चित्र के साथ उत्पन्न होने के इस प्रभाव को स्थानपन्नता (transposition) कहते हैं। इसे एक पद को दूसरे पक्ष में स्थानापन्न करना भी कहते हैं। सरल भाषा में यहाँ स्थानापन्न करने से तात्पर्य एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने से है।

3. समीकरण को हल करने की एक उपयुक्त विधि यह है कि चर और अचर पदों को अलग-अलग पक्षों में ले जाएँ।

उदाहरण 2 : समीकरण $5x - 3 = 2x + 9$ को हल कीजिए।

हल : $2x$ को दायाँ पक्ष से बायाँ पक्ष में स्थानापन्न करने पर प्राप्त होता है :

$$5x - 3 - 2x = 9$$

-3 को बायाँ पक्ष से दायाँ पक्ष में स्थानापन्न करने पर

$$5x - 2x = 9 + 3,$$

या, $3x = 12$

या, $x = 4$ (दोनों पक्षों को 3 से भाग देकर)

फलत: समीकरण का हल $x = 4$ है।

प्रश्नावली 4.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

1. $x + 4 = 2x$ 2. $y - 7 = 3y + 9$ 3. $3u + 2 = 2u + 7$

4. $2x-3=\frac{1}{2}x$

5. $\frac{5}{2}x+3=\frac{21}{2}$

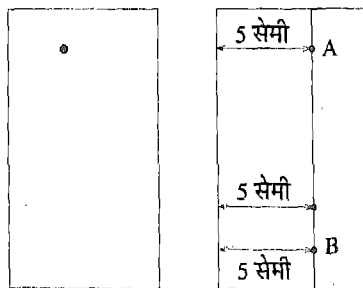
6. $24-3(u-2)=u+8$

7. $3x+3=15$

8. $2y+7=19$

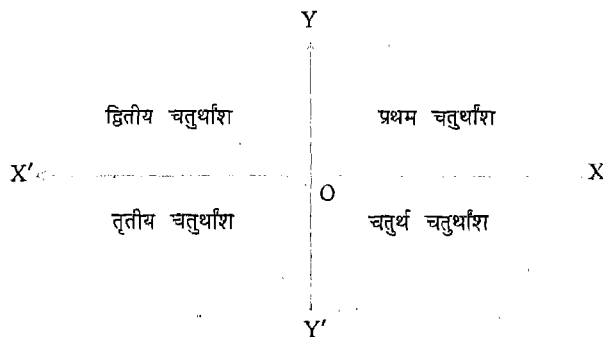
9. $\sqrt{3}x-2=2\sqrt{3}+4$

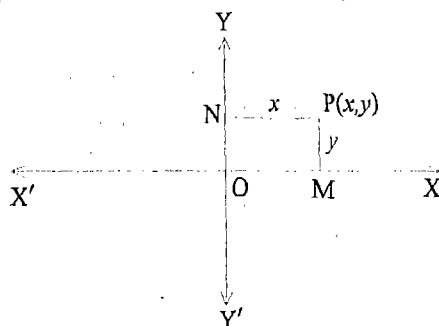
4.4 निर्देशांक

माना कि आप कागज के पन्ने पर कहीं एक बिन्दु लगाते हैं। (आकृति 4.1 (a) यदि हम आपसे कागज पर बिन्दु की स्थिति के विषय में पूछें तो आप क्या उत्तर देंगे? सम्भ्वत: आप कुछ ऐसा कहेंगे "बिन्दु कागज के ऊपर वाले आधे भाग में हैं। या बिन्दु कागज के बाएँ किनारे के पास है।" या "बिन्दु कागज के बाएँ ऊपरी कोने के बहुत पास है।" क्या इनमें से किसी भी उत्तर से बिन्दु की सही स्थिति का ज्ञान होता है? नहीं। यदि आप कुछ गणितीय प्रवृत्ति वाले हैं तो आप कुछ ऐसा कह सकते थे : "बिन्दु कागज के बाएँ किनारे से लगभग 5 सेमी दूरी पर हैं।" इससे बिन्दु की स्थिति आंशिक रूप से तो ज्ञात हो जाती है किन्तु पूर्णरूपेण नहीं। कारण यह है कि रेखा AB के सभी बिन्दु कागज के बाएँ किनारे से 5 सेमी दूर हैं (आकृति 4.1(b)। थोड़ा सा सोचने के बाद आप सम्भवत : यह कहेंगे कि बिन्दु कागज के

(a) आकृति 4.1 (b)

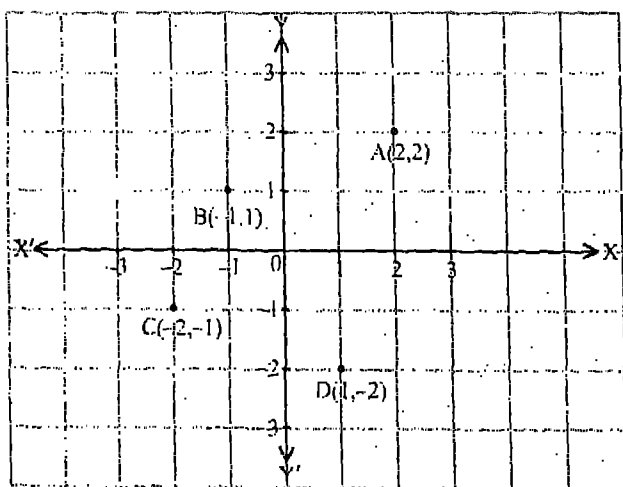
निचले किनारे से इतनी दूर है। अब बात बन जाती है। सारांश यह कि बिन्दु की स्थिति का ज्ञान कराने के लिए हमने दो स्थिर रेखाओं से इस बिन्दु की दूरी बतला दी। यह दो स्थिर रेखाएँ थीं : कागज का बायाँ किनारा और कागज का निचला किनारा। इस सरल विचार के दूरगामी परिणाम निकले। इससे गणित की एक महत्त्वपूर्ण शाखा निर्देशांक ज्यामिति का जन्म हुआ। आइए इसको ठीक से समझा जाए।

एक समतल में दो लम्बवत् रेखाएँ X'OX और Y'OY लीजिए। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु O को दोनों रेखाओं का शून्य बिन्दु मानिए। (आप जानते ही हैं कि एक रेखा पर

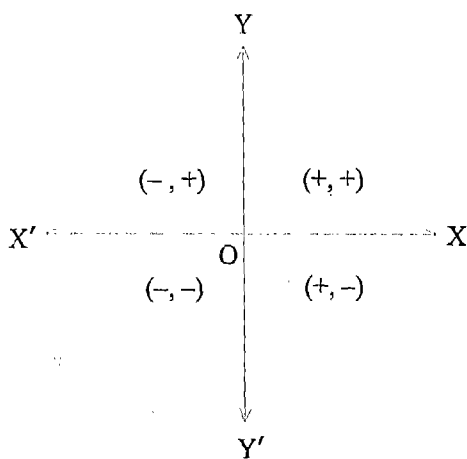
संख्याओं को कैसे व्यक्त किया जाता है।) इन दो रेखाओं को प्राय: दो रेखाओं द्वारा जैसा कि आकृति 4.2 में दिखाए अनुसार लिया जाता है। जैसा कि आप जानते हैं, X'OX का धनात्मक भाग OX और ऋणात्मक भाग OX' हैं, OY को Y'OY का धनात्मक भाग और OY', Y'OY का ऋणात्मक भाग है (आकृति 4.2)। आप चाहें तो रेखा के ऋणात्मक भाग से X', Y' और तीर के निशान हटा सकते हैं। बिन्दु O को *मूल बिन्दु* या *केन्द्र बिन्दु* (origin) कहते हैं।

आकृति 4.2

X'OX को X का *अक्ष* या सीधे X-*अक्ष* (*x*-axis) कहते हैं। Y'OY को Y का *अक्ष* या सीधे Y-*अक्ष* (*y*-axis) कहते हैं। X'OX और Y'OY दोनों को मिलाकर निर्देशांक अक्ष कहते हैं। निर्देशांक अक्ष समतल को चार भागों में बाँट देते हैं। इन भागों को *चतुर्थांश* (quadrant) कहा जाता है। इन भागों के नाम प्रथम (I) चतुर्थांश, द्वितीय (II) चतुर्थांश, तृतीय (III) चतुर्थांश और चतुर्थ (IV) चतुर्थांश कहते हैं (आकृति 4.2)। समतल, x-अक्ष और y-अक्ष को मिलाकर कार्तीय समतल (Cartesian plane) कहते हैं। समतल में किसी बिन्दु P की स्थिति का निर्धारण इस प्रकार किया जाता है :

आकृति 4.3

आकृति 4.3 के अनुसार P से PM, Y'OY के समांतर और PN, X'OX के समांतर खींचिए। अब M और N क्रमश: रेखाओं X'OX और Y'OY के बिंदु हैं। अत: ये किन्हीं वास्तविक संख्याओं, कहिए क्रमश: x और y, को व्यक्त करते हैं। अब x और y, अक्षों पर M और N की स्थिति के अनुसार, धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं। आकृति 4.3 में P चतुर्थांश I में स्थित है। यहाँ दोनों M और N, अक्षों के धनात्मक भाग पर स्थित हैं। अत: यहाँ दोनों x और y धनात्मक हैं। यह संख्याएँ x और y, बिन्दु P के कार्तीय निर्देशांक (Cartesian Coordinates) या सीधे P के निर्देशांक कहलाते हैं। इनको कमित युग्म (ordered pair) (x, y) के रूप में लिखा जाता है। x को P का भुज (abscissa) और y को P की कोटि (ordinate) कहा जाता है। प्रतीक $P(x, y)$ यह बताता है कि x और y बिन्दु P के निर्देशांक हैं। इस प्रकार

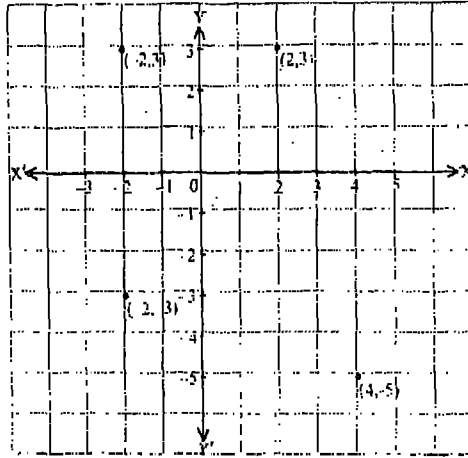
P के भुज का परिमाण $= OM = NP =$ P की y-अक्ष से दूरी P की कोटि का परिमाण $= ON = MP =$ P की x-अक्ष से दूरी y-अक्ष के दाहिने पड़ने वाले बिन्दुओं का भुज धनात्मक होता है, y-अक्ष के बिन्दुओं का भुज शून्य, और y-अक्ष के बाएँ पड़ने वाले बिन्दुओं का भुज ऋणात्मक होता है। x-अक्ष से ऊपर वाले बिन्दुओं की कोटि धनात्मक, x-अक्ष के बिन्दुओं की कोटि शून्य और x-अक्ष के नीचे के बिन्दुओं की कोटि ऋणात्मक होती है। उदाहरणत:, आकृति 4.4 में बिन्दु A और D y-अक्ष के दाहिने हैं और इनके भुज क्रमश: 2 और 1 धनात्मक हैं। B और C, y-अक्ष के बाँए

आकृति 4.4

हैं और इनके भुज क्रमशः −1 और −2 ऋणात्मक हैं। A और B, x-अक्ष के ऊपर हैं और इनकी कोटियाँ क्रमशः 2 और 1 धनात्मक हैं। C और D x-अक्ष के नीचे हैं और इनकी कोटियाँ क्रमशः −1 और −2 ऋणात्मक हैं।

स्पष्ट है कि किसी बिन्दु के भुज और कोटि दोनों ही चतुर्थांश I में धनात्मक और चतुर्थांश III में ऋणात्मक होते हैं। चतुर्थांश II के बिन्दुओं के भुज ऋणात्मक और इनकी कोटियाँ धनात्मक होती हैं। चतुर्थांश 4 के बिन्दुओं के भुज धनात्मक और इनकी कोटियाँ ऋणात्मक होती हैं।

आकृति 4.5

4.5 ग्राफ कागज पर बिन्दुओं का आलेखन

दिए गए निर्देशांक वाले बिन्दु को कार्तीय समतल में चित्रित करने की क्रिया को बिन्दु का आलेखन (plotting a point) कहते हैं। किसी बिन्दु के आलेखन के लिए हम वर्गांकित कागज (squared paper) का प्रयोग करते हैं। इस कागज को ग्राफ-कागज (graph paper) भी कहते हैं। वर्गांकित कागज पर दो लम्बवत् रेखाएँ X'OX और Y'OY, निर्देशांक अक्षों के रूप में लीजिए (आकृति 4.6)। मान लीजिए कि बिन्दु (2, 3) का आलेखन करना है। सबसे पहले x-अक्ष पर O के दाईं ओर दो खंड (वर्ग) गिनिए। अब यहाँ से ऊपर की ओर तीन खंड गिनकर जो बिन्दु मिले उसे चिन्हित कीजिए। इस बिन्दु का नाम P रखिए और इसके पास P(2, 3) लिखिए। ध्यान दीजिए कि यदि हम P से XO और YO के समांतर रेखाएँ खीचें जो इन्हें B और A पर मिलें तो OA = 2 और OB = 3 होगा। अत: P ठीक बिन्दु (2, 3) ही है।

अब बिन्दु (−2, 3) का आलेखन करेंगे। यह बिन्दु चतुर्थांश II में स्थित है। क्योंकि भुज-2 ऋणात्मक है, हम X'OX के ऋणात्मक भाग पर दो खंड गिनेंगे। तात्पर्य यह कि O की बाईं ओर दो खंड गिनेंगे। यहाँ से ऊपर की ओर 3 खंड गिनेंगे और जो बिन्दु मिलेगा उसे चिन्हित करेंगे। यह बिन्दु (−2, 3) है।

आकृति 4.6

अब देखते हैं कि चतुर्थांश III में किसी बिन्दु, कहिए (−2,−3), का आलेखन कैसे करेंगे। पहले की भाँति O की बाईं ओर 2 खंड गिनेंगे। कोटि−3 के ऋणात्मक होने के कारण यहाँ से 3 खंड नीचे की ओर गिनेंगे। इस प्रकार मिलने वाले बिन्दु को चिन्हित करेंगे। यह बिन्दु (−2,−3) है।

चतुर्थांश IV में किसी बिन्दु, कहिए (4,−5), का आलेखन करने के लिए x−अक्ष पर O के दाईं ओर 4 खंड, और यहाँ से नीचे की ओर 5 खंड गिन लेंगे। अब मिलने वाले बिन्दु को चिन्हित करेंगे। यही बिन्दु (4,−5) हैं।

प्रश्नावली 4.2

1. जिस चतुर्थांश में बिन्दु स्थित है उसका नाम बतलाइए :

   (a) A(1,1) (b) B(2,4) (c) C(−3,−10) (d) D(−1,2)

   (e) E(1,−1) (f) F(−2,−4) (g) G(−3,10) (h) H(1,−2)

2. निम्नलिखित में से कौन से बिन्दु x-अक्ष पर स्थित हैं?

   A(1,1), B(1,0), C(0,1), D(0,0), E(−1,0), F(0,−1), G(4,0), H(0,−7)

3. प्रश्न 2 में दिए गए बिन्दुओं में से कौन से y-अक्ष पर स्थित हैं?
4. बिन्दुओं A(2,0), B(2,2), C(0,2) को चिन्हित करिए। रेखाखंड OA, AB, BC, और CO खींचिए। क्या आकृति बनी?
5. बिन्दुओं A(4,4) और B(–4,4) को चिन्हित कीजिए। रेखाखंड OA, OB और BA खींचिए। ऐसा करने से क्या आकृति प्राप्त होती है?

क्रियाकलाप

I. आकृति 4.7(a) में बने चित्र को देखिए। रेखाखंडों के अन्त्य बिन्दुओं के निर्देशांक बतलाइए। इसी प्रकार रेखाखंडों से कुछ अन्य उपयुक्त चित्र बनाइए जिनके अन्त्य के निर्देशांक पूर्णांक हों। इन निर्देशांकों को लिखिए भी।

II. आक्रतियों 4.7 (b), 4.7 (c) और 4.7(d) में बने नाव, लैम्प और झोंपड़ी के चित्रों को देखिए। अन्त्य-बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए। वर्गांकित कागज पर रेखाखंड से अपनी पसंद के कुछ अन्य चित्र बनाइए। पर ध्यान रहे, अन्त्य बिन्दुओं के निर्देशांक पूर्णांक हों। अपनी सहेलियों (या मित्रों) से इन बिन्दुओं के निर्देशांक पूछिए।

4.6 दो चरों वाले रैखिक समीकरण

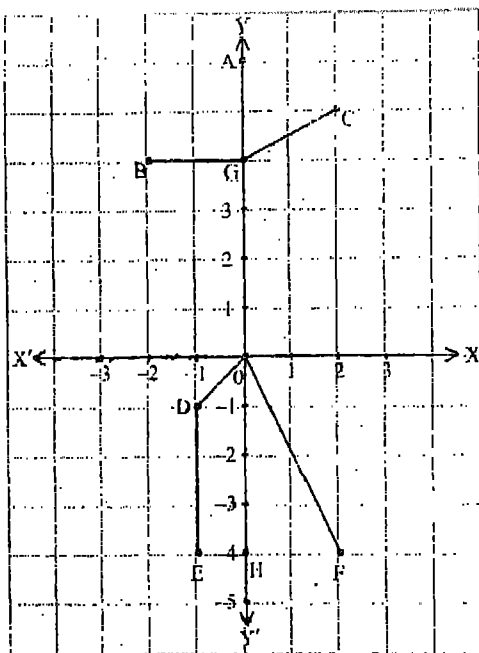
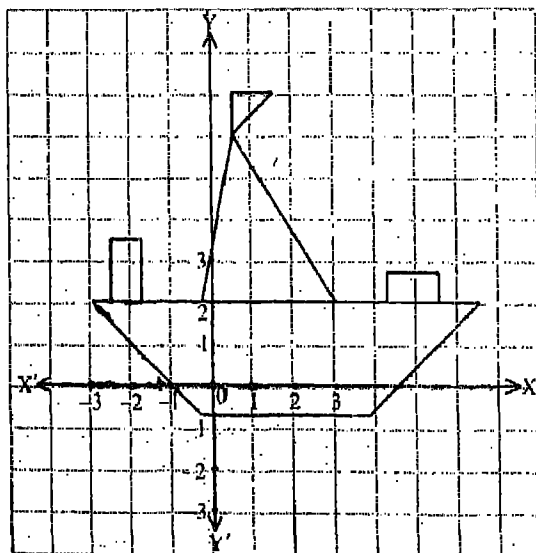
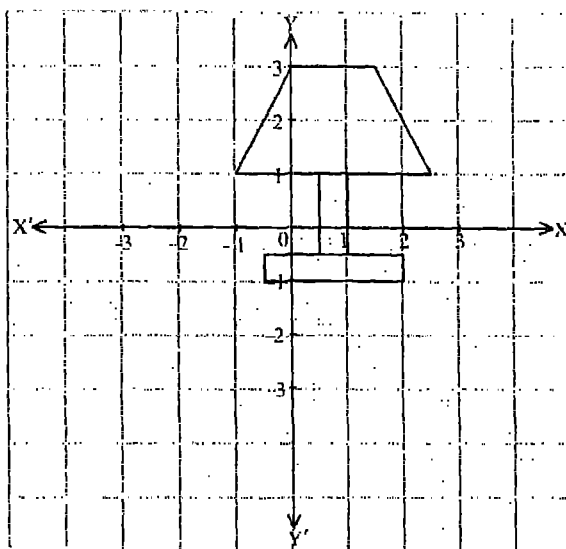
दो चरों वाले रैखिक समीकरण एक चर वाले रैखिक समीकरणों से इस बात में भिन्न होते हैं कि इनमें एक के स्थान पर दो अज्ञात राशियाँ होती हैं। इस प्रकार, जहाँ एक चर वाला रैखिक समीकरण $ax+b=0,\ a\neq 0$ के रूप में होता है, दो चरों वाले रैखिक समीकरण का रूप होता है :

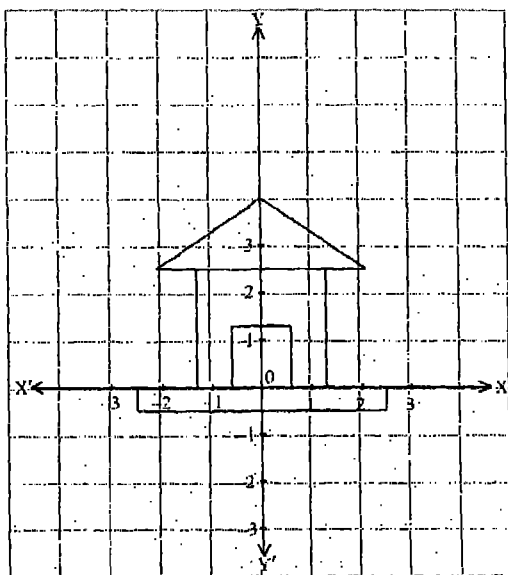
$$ax+by+c=0 \text{ जहाँ } a\neq 0, b\neq 0$$

सामान्यत: इन दो चरों को x और y से व्यक्त करते हैं। पर विशेष दशाओं में अन्य चरों का प्रयोग भी किया जा सकता हैं। उदाहरणत: सब-के-सब $x+2y+4=0$, $x+2y=4$, $-3x+7y-5=0$, $5u+6v=11$ दो चरों वाले रैखिक समीकरण हैं।

ध्यान दीजिए कि यदि $ax+by+c=0$ में a, b में से एक तो शून्य हो और दूसरा शून्य न हो तो यह समीकरण $ax+c=0$ या $by+c=0$ बन जाएगा। दोनों दशाओं में हमें एक चर वाला रैखिक समीकरण प्राप्त होता है। इसी कारण से प्रतिबन्ध

(a)

(b)

आकृति 4.7

(c)

(d)

आकृति 4.7

$a \neq 0, b \neq 0$ लगाया जाता है। तब भी, विशेष दशाओं में हम a और b में से एक को शून्य मानकर चलेंगे।

4.7 दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का हल

एक चर वाले रैखिक समीकरण की भाँति हम दो चरों वाले रैखिक समीकरणों को भी हल कर सकते हैं। यहाँ हल से तात्पर्य होता है

x और y का एक-एक ऐसा मान जिसके लिए समीकरण के दोनो पक्षों (दायाँ पक्ष और बायाँ पक्ष) का मान बराबर हो जाए।

उदाहरणत: $x = 2, y = 3$ समीकरण

$$3x + 4y = 18$$

का हल है क्योंकि $x = 2, y = 3$ के लिए इस समीकरण का

बायाँ पक्ष $= 3x + 4y = 3 \times 2 + 4 \times 3 = 18 =$ दायाँ पक्ष

दूसरी ओर, $x = 1, y = 2$ पर इस समीकरण का हल नहीं है क्योंकि $x = 1, y = 2$ पर इस समीकरण के लिए

बायाँ पक्ष $= 3x + 4y = 3 \times 1 + 4 \times 2 = 11 \neq$ दायाँ पक्ष (जो 18 है)

दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के हल के विषय में एक रोचक बात यह है कि हल अद्वितीय नहीं होता। (तात्पर्य यह कि ऐसे समीकरण का केवल एक हल न होकर एक से अधिक हल होते हैं।) सत्यापित कीजिए कि $x = 6, y = 0$ भी ऊपर दिए गए समीकरण का हल है। इस प्रकार, इस समीकरण के कम-से-कम यह दो हल

$x = 2, y = 3$ और $x = 6, y = 0$

तो हैं ही। क्या आप कोई और हल खोज सकते हैं? अवश्य, सरलता से। जैसे ही इस समीकरण में आप x का कोई मान रख देते हैं, वैसे ही यह y में एक रैखिक समीकरण बन जाता है। यदि आप इस प्रकार बने समीकरण को y के लिए हल कर लें तो y का यह मान और x का जो मान आपने दिए हुए समीकरण में रखा था, मिलकर दिए हुए समीकरण का हल बन जाते हैं। इस प्रकार, दो चरों वाले किसी रैखिक समीकरण के हलों की संख्या का कोई अन्त नहीं। अत: हम कहते हैं कि

दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अनंत (अनगिनत) हल होते हैं।

दो चरों वाले समीकरणों के भिन्न-भिन्न हल निकालने की विधि आगे दिए गए उदाहरणों से समझाई जा रही है।

उदाहरण 3 : समीकरण $x+2y=3$ के चार भिन्न-भिन्न हल निकालिए।

हल : ध्यान से देखने पर ज्ञात हो जाता है कि $x=1, y=1$ दिए गए समीकरण का हल है क्योंकि $x=1, y=1$ के लिए

बायाँ पक्ष $= x + 2y = 1 + 2 = 3 =$ दायाँ पक्ष

अब $x=0$ ले लीजिए। x के इस मान के लिए दिया गया समीकरण $2y=3$ बन जाता है। इसका एक अकेला हल $y=\frac{3}{2}$ है। फलत: $x=0,\ y=\frac{3}{2}$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है।

$y=0$ लेने पर दिया गया समीकरण $x=3$ बन जाता है। अत: $x=3, y=0$ एक और हल है।

अंत में $y=-1$ लेते हैं। अब दिया गया समीकरण $x-2=3$ अर्थात् $x=5$ बन जाता है। फलत: $x=5, y=-1$ एक और हल है। इस प्रकार, दिए गए समीकरण के चार हल हैं :

$x = 1, y = 1,\qquad x = 3, y = 0,$

$x = 5, y = -1,\qquad x = 0, y = 1.5$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि दो चरों वाले समीकरण के दो सुविधाजनक हल $(0, y)$ और $(x, 0)$ रूप में होते हैं।

4.8 दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का आलेखन

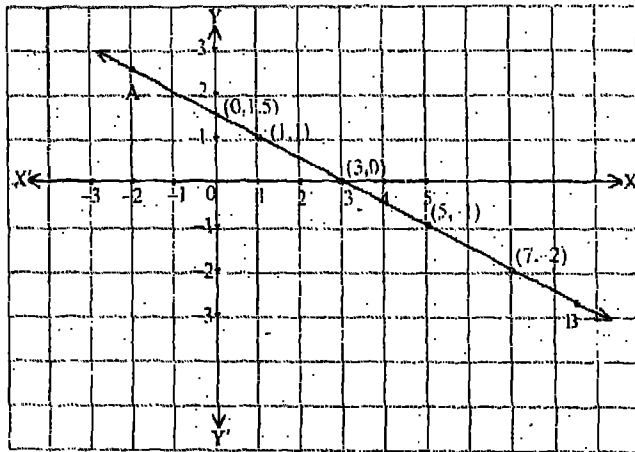
उदाहरण 3 में दिए गए समीकरण, अर्थात्

$$x + 2y = 3, \tag{1}$$

के हमने चार हल निकाले। इनको हम एक तालिका के रूप में लिख सकते हैं। इसके लिए किसी हल के x के मान के नीचे इस हल का y का मान लिख दिया जाता है। ऐसा करने पर यह तालिका प्राप्त होती है:

तालिका 4.1

x	1	0	3	5
y	1	1.5	0	-1

अब वर्गांकित कागज पर बिन्दु (1,1), (0,1.5), (3,0) और (5,–1) को चिन्हित कीजिए। इनमें से किन्हीं दो बिन्दुओं से निकलने वाली रेखा खींचिए। आपने क्या देखा? शेष दोनों बिन्दु इसी रेखा पर निकले न! वास्तविकता यह है कि वे सब अनगिनत बिन्दु, जिनके निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं, इसी रेखा, कहो AB पर स्थित होंगे। दूसरी ओर यदि आप रेखा AB पर स्थित कोई बिन्दु (p, q) लेते हैं तो आप देखेंगे कि $x = p, y = q$ समीकरण (1) का हल होगा। उदाहरण के लिए बिन्दु $(7, -2)$ रेखा AB पर स्थित है, और आप सत्यापित कर सकते हैं कि $x = 7$, $y = -2$ सचमुच समीकरण (1) का हल है।

आकृति 4.8

इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि यदि AB वह रेखा हो जो ऐसे दो बिन्दुओं को जोड़ने से बनी हो जिनके निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करते हों तो रेखा AB और समीकरण (1), एक-दूसरे से इस प्रकार जुड़े हैं:

1. प्रत्येक वह बिन्दु जिसके निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं, रेखा AB पर स्थित होता है।

2. रेखा AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु (a, b) से समीकरण (1) का एक हल $x = a, y = b$ प्राप्त होता है।

ऊपर के तथ्यों को हम यह कहकर व्यक्त करते हैं कि रेखा AB समीकरण (1) का आलेख (graph) है। समीकरण (1) के साथ जो विशेषण रैखिक जुड़ा हुआ है वह यही बताता है कि इस समीकरण का आलेख एक रेखा है।

ऊपर हमने जिस प्रकार की बात समीकरण $x + 2y = 3$ के लिए कही वैसी ही बात प्रत्येक रैखिक समीकरण $ax + by = c$ के लिए कही जा सकती है। अर्थात्

1. $ax + by = c$ का आलेख एक रेखा है, माना रेखा AB
2. $ax + by = c$ के आलेख, अर्थात् रेखा AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं।
3. अगर कोई बिन्दु $(p, q)]$ $ax + by = c$ के आलेख, अर्थात् रेखा AB पर स्थित हो तो $x = p, y = q, ax + by = c$ का हल होगा।

टिप्पणियाँ :

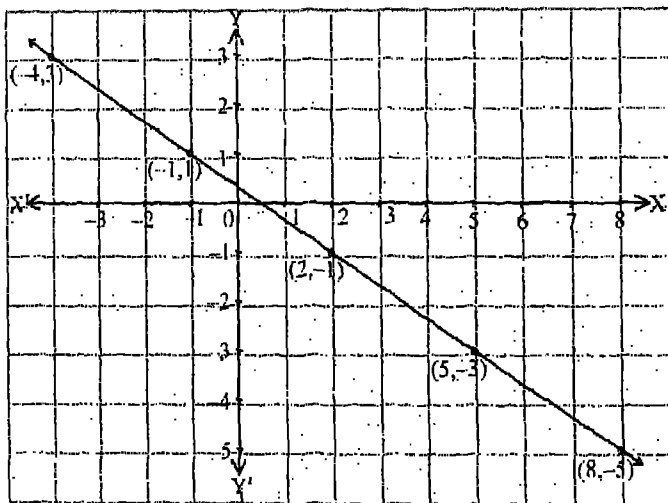
1. स्पष्ट है कि समीकरणों $ax + by = c$ और $k(ax + by) = kc, k \neq 0$ के हल वही होते हैं। कारण यह है कि यदि $x = p, y = q, ax + by = c$ का हल हो तो $ap + bq = c,$ हो जाएगा। यहाँ से $k(ap + bq) = kc$ हो जाएगा यदि $k \neq 0$। पर इसका अर्थ यह होगा कि $x = p, y = q$ समीकरण $k(ax + by = kc)$ का हल हो जाएगा। फलतः $k \neq 0$ होने पर $ax + by = c$ का आलेख वही होगा जो $k(ax + by) = kc$ का है।
2. आप जानते हैं कि $ax + by = c$ का आलेख एक रेखा है। आप यह भी जानते हैं कि यदि रेखा के कोई से दो बिन्दु ज्ञात हों तो यह रेखा खींची जा सकती है। इससे यह परिणाम निकला कि यदि दो ऐसे बिन्दु मिल जाएँ जिनके निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट करते हों तो इस समीकरण का आलेख खींचा जा सकता है।

उदाहरण 4 : $2x + 3y = 1$ का आलेख खींचिए। इस आलेख का प्रयोग समीकरण के कुछ और हल निकालने के लिए कीजिए। आलेख से भी सत्यापित कीजिए कि $x = 5, y = -3$ इस समीकरण का हल है।

हल : जाँच लीजिए कि $x=-1, y=1$, और $x=2, y=-1$ वास्तव में दिए गए समीकरण के हल हैं। अतः हम आलेख खींचने के लिए निम्नलिखित तालिका का प्रयोग करेंगे:

तालिका 4.2

x	-1	2
y	1	-1

आलेख खींचने के लिए हम ऊपर की तालिका से प्राप्त दोनों बिन्दुओं को चिन्हित कर उन्हें एक रेखा द्वारा जोड़ लेंगे। (देखिए आकृति 4.9) आलेख से ज्ञात होता है कि $x=-4, y=3$, और $x=8, y=-5$ भी हल हैं। बिन्दु $(5,-3)$ भी आलेख पर स्थित है। अतः $x=5, y=-3$ वास्तव में दिए हुए समीकरण का हल है।

आकृति 4.9

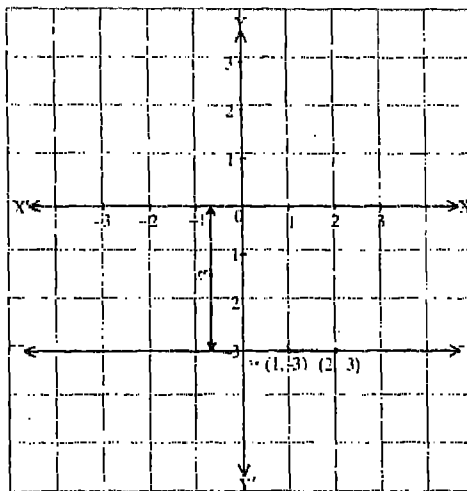
4.9 एक चर वाले रैखिक समीकरण का कार्तीय समतल में आलेखन

याद कीजिए कि यदि $a \neq 0, b \neq 0$ $ax+by+c=0$ दो चरों वाला समीकरण होता है। परन्तु यदि हम a, b में से किसी एक को 0 लें, तो यह एक चर वाला समीकरण बन जाता है। आइए, एक उदाहरण द्वारा यह देखें कि जब a, b में से एक को 0 लेते हैं तो हलों और आलेख में क्या अंतर आता है।

उदाहरण 5 : समीकरण $3y + 9 = 0$ के तीन हल निकालिए और इसका आलेख भी खींचिए।

हल : पहले तो यह जान लीजिए कि दिए हुए समीकरण को $0x + 3y + 9 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। क्योंकि x का गुणांक शून्य है, x को कुछ भी मान दिया जा सकता है। x के सभी मानों के लिए 0x का मान 0 होता है। इस प्रकार, दिए गए समीकरण के संतुष्ट होने के लिए y का ऐसा मान लेना होगा कि $3y + 9 = 0$ हो जाए। दूसरे शब्दों में $y = -3$ लेना होगा। फलतः दिए हुए समीकरण के तीन हल होंगे :

$$x = 1, y = -3;\ x = 2, y = -3; x = 0, y = -3$$

समीकरण के आलेखन के लिए, पहले दो हल अर्थात $x = 1,\ y = -3$ और $x = 2,\ y = -3$ ले लेते हैं। अब इन दो बिन्दुओं को चिन्हित कर इन्हें एक रेखा द्वारा जोड़ लेते हैं। आप क्या देखते हैं? क्या यह रेखा x-अक्ष के समांतर है? निश्चय ही, यह x-अक्ष के समांतर है और इससे 3 इकाई नीचे की ओर है। आकृति 4.10 को देखिए।

आकृति 4.10

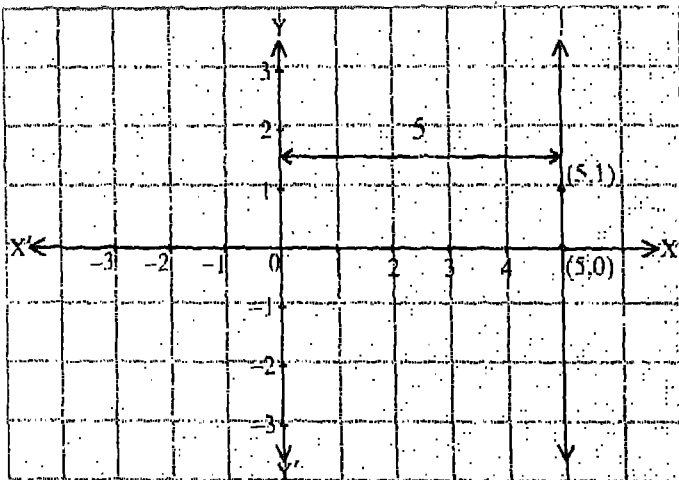
टिप्पणी : ऊपर x के मान की कोई भूमिका नहीं थी क्योंकि इसका मान कुछ भी लिया जा सकता था। अतः ऊपर का आलेख सही अर्थों में तो $3y + 9 = 0$ या $y = -3$ का ही आलेख था।

उदाहरण 6 : रैखिक समीकरण $x-5=0$ का आलेख खींचिए।

हल : इस समीकरण को हम दो चरों वाला समीकरण समझ सकते हैं जहाँ y का गुणांक शून्य है। इस बार y का मान कुछ भी लिया जा सकता है क्योंकि $0y$ सदा 0 ही रहता है। परन्तु ध्यान रहे कि x के मान का समीकरण $x-5=0$ या $x=5$ को संतुष्ट करना पड़ेगा। फलतः दिए गए समीकरण के दो हल हैं :

$$x=5, y=0 \text{ और } x=5, y=1$$

बिन्दुओं $(5,0)$ और $(5,1)$ का चिन्हित कर इन्हें जोड़ने से जो रेखा प्राप्त होती है वह दिए गए समीकरण या $x-5=0$ या $x=5$ का आलेख है। ध्यान दीजिए, यह रेखा $y-$अक्ष के समांतर और इससे 5 इकाई की दूरी पर है।

टिप्पणी : समीकरण $y = a$ का आलेख x–अक्ष के समांतर एक रेखा होती है। $a>0$ होने पर यह रेखा x–अक्ष से ऊपर होती है और $a>0$ होने पर x–अक्ष से नीचे। ($a=0$ पर यह कहाँ होगी)

आकृति 4.11

उदाहरणतः $y=-5$ का आलेख x–अक्ष के समांतर एक रेखा है जो x–अक्ष से 5 इकाई दूर इसके नीचे स्थित है। इसी प्रकार, समीकरण $x=a$ का आलेख y–अक्ष के समांतर एक रेखा होती है। $a>0$ होने पर यह y–अक्ष के दाएँ और $a<0$ होने पर यह y–अक्ष के बाएँ होती है। ($a=0$ पर यह कहाँ होगी?)

प्रश्नावली 4.3

1. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से $x = 2, y = 1$ किस-किस समीकरण का हल है :

(a) $2x + 5y = 9$ (b) $5x + 3y = 14$ (c) $2x + 3y = 7$

(d) $2x - 3y = 1$ (e) $2x - 3y + 7 = 8$ (f) $x + y + 4 = 0$

2. निम्नलिखित प्रत्येक समीकरण का आलेख खींचिए। आलेख से कुछ हल पढ़िए और समीकरण में प्रतिस्थापित कर इन्हें सत्यापित कीजिए। प्रत्येक के लिए वे बिन्दु निकालिए जहाँ यह आलेख दोनों अक्षों से मिलता है।

(a) $2x + y = 6$ (b) $x - 2y = 4$ (c) $2(x - 1) + 3y = 4$

(d) $y - 3x = 9$ (e) $2(x + 3) - 3(y + 1) = 0$ (f) $(x - 4) - y + 4 = 0$

3. दो चरों वाले निम्नलिखित प्रत्येक समीकरण के कम-से-कम 3 हल निकालिए:

(a) $2x + 5y = 13$ (b) $5x + 3y = 4$ (c) $2x + 3y = 4$

(d) $2x - 3y = -11$ (e) $2x - 3y + 7 = 0$ (f) $x + y + 4 = 0$

4. निम्नलिखित प्रत्येक समीकरण के चार हल निकालिए :

(a) $12x + 5y = 0$ (b) $5x - 3y = 0$ (c) $2(x - 1) + 3y = 4$

(d) $2x - 3(y - 2) = 1$ (e) $2(x + 3) - 3(y + 1) = 0$ (f) $(x - 4) - y + 4 = 0$

(g) $x + y = 0$ (h) $x - y = 0$ (i) $x = 0$

5. नीचे दिए गए समीकरण-युग्मों के लिए $x = a, y = 0$ और $x = 0, y = b$ रूप के हल निकालिए। क्या इन युग्मों के ऐसे कोई उभयनिष्ठ हल हैं?

(a) $3x + 2y = 6$ और $5x - 2y = 10$

(b) $5x + 3y = 15$ और $5x + 2y = 10$.

(c) $9x + 7y = 63$ और $x - y = 10$

6. a का ऐसा मान निकालिए जिसके लिए निम्नलिखित प्रत्येक समीकरण का एक हल $x = 1, y = 1$ हो :

(a) $3x + ay = 6$ (b) $ax - 2y = 10$ (c) $5x + 3y = a$

(d) $5x + 2ay = 3a$ (e) $9ax + 12ay = 63$ (f) $x - y = a$

7. निम्नलिखित समीकरणों के आलेख खींचिए :

(a) $x = 2$ (b) $y = 3$ (c) $x = -1$

(d) $y = -3$ (e) $2y + 5 = 0$ (f) $3x - 2 = 0$

(g) $x + y = 0$ (h) $x - y = 0$ (i) $x = 0$

(j) $y = 0$

अध्याय 5

प्रतिशत एवं उसके अनुप्रयोग

5.1 भूमिका

हमने पिछली कक्षाओं में प्रतिशत एवं उसके अनुप्रयोग के संबंध में पढ़ा ही है। याद कीजिए कि प्रतिशत एक भिन्न है जिसका हर 100 है। शब्द लेटिन per centum का संक्षिप्त रूप प्रतिशत है, जिसका अर्थ है 'प्रति सैकड़ा' 'सौ पर' या सौवाँ'। प्रतिशत को' प्रतीक % से दर्शाते हैं इस प्रकार 25 प्रतिशत को 25% लिखा जाता है। आप यह भी स्मरण कीजिए कि प्रतिशत को भिन्न (या दशमलव) के रूप में दर्शाया जा सकता है और विलोमतः भी। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है

(i) $74\% = \frac{74}{100} = 0.74$ (ii) $8\frac{1}{2}\% = \frac{17}{200} = 0.085$

(iii) $0.25 = \frac{25}{100} = 25\%$ (iv) $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$

इस अध्याय में, हम प्रतिशत, लाभ और हानि और बट्टा के उन प्रश्नों से कुछ अधिक कठिन प्रश्न हल करना सीखेंगे जो कि आपने पिछली कक्षाओं में पढ़े थे। इस अध्याय में, हम बिक्री कर (Sales Tax) एवं निर्वाह सूचकांक (cost of living index) की अवधारणाओं तथा उनकी गणना से भी अवगत कराएंगे।

5.2 प्रतिशत पर कुछ प्रश्न

अब प्रतिशत को अच्छी तरह से समझने के लिए हम कुछ उदाहरणों
हैं।

उदाहरण 1 : किसी शाला में विद्यार्थियों की संख्या 900 से बढ़कर
है। ज्ञात कीजिए कि विद्यार्थियों की संख्या में कितने प्रतिशत

हल : विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि = 936–900 = 36

हमें ज्ञात करना है कि 900 का कितना प्रतिशत 36 है?

अभीष्ट वृद्धि $= \frac{36}{900} \times 100 = 4$

अत: विद्यार्थियों की संख्या में 4% वृद्धि हुई।

उदाहरण 2 : एक परीक्षा में, राजू एवं नीता को क्रमश: 294, और 372 अंक प्राप्त हुए। यदि नीता को 62% अंक प्राप्त हुए हों, तो अधिकतम अंक एवं राजू के प्राप्तांक का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए अधिकतम अंक x हैं।

नीता के अंक $= x$ के 62%

नीता को 372 अंक प्राप्त हुए।

$$\therefore \quad \frac{62x}{100} = 372$$

$$\therefore \quad x = \frac{372}{62} \times 100 = 600$$

राजू के प्राप्तांक का प्रतिशत $= \frac{294}{600} \times 100 = 49$

अत: अधिकतम अंक 600 हैं और राजू को 49% अंक प्राप्त हुए।

उदाहरण 3 : चाय का मूल्य 10% घट जाने पर एक व्यापारी 22500 रु. में 25 किलो चाय अधिक खरीद सकता है। प्रति किलो चाय का घटा हुआ मूल्य क्या है?

हल : चाय के मूल्य में कमी = 10%

22500 रु. का $10\% = \frac{10}{100} \times 22500$ रु. = 2250 रु.

अब इस 2250 रु. से व्यापारी 25 किलो चाय क्रय कर सकता है।

∴ 25 किलो चाय का घटा हुआ मूल्य = 2250 रु.

∴ 1 किलो चाय का घटा हुआ मूल्य $= \frac{2250}{25} \times 1$ रु. = 90 रु.

मान लीजिए 1 किलो चाय का मूल मूल्य = x रु.

मूल्य में कमी $= \frac{10x}{100}$

प्रति किलो चाय का घटा हुआ मूल्य = $x - \frac{10x}{100}$

$\therefore \quad x - \frac{10x}{100} = 90$

या $\quad \frac{90x}{100} = 90$

या $\quad x = 100$

अर्थात् प्रति किलो चाय का मूल मूल्य 100 रु. है।

उदाहरण 4 : दो उम्मीदवारों A एवं B के बीच एक चुनाव में A को कुल वैध मतों के 60% प्राप्त हुए। यदि कुल 500000 मतों के 15% अवैध घोषित हुए हों, तो B के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : अवैध मतों की कुल संख्या

= 500000 का 15%

$= \frac{15}{100} \times 500000 = 75000$

वैध मतों की कुल संख्या = 500000 − 75000 = 425000

उम्मीदवार A के पक्ष में डाले गए वैध मतों का प्रतिशत = 60%

उम्मीदवार B के पक्ष में डाले गए वैध मतों का प्रतिशत = $(100 - 60)\%$ = 40%

उम्मीदवार B के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या

= 425000 का 40%

$= \frac{40}{100} \times 425000$

= 170000

अतः उम्मीदवार B ने 170000 वैध मत प्राप्त किए।

उदाहरण 5 : किसी वस्तु का मूल्य 20% बढ़ गया है। ज्ञात कीजिए कि उपभोक्ता उस वस्तु का उपभोग कितने प्रतिशत कम कर दे कि उसके व्यय में वृद्धि न हो।

हल : मान लीजिए प्रति किलो वस्तु का मूल्य = 1 रु.

और वस्तु की खपत = 100 किलो

$\therefore$ कुल व्यय = 1 × 100 रु. = 100 रु.

मूल्य 20% बढ़ गया है

$\therefore$ प्रति किलो वस्तु का बढ़ा हुआ मूल्य $= \left(1+\frac{20}{100}\times 1\right)$ रु. $= \frac{6}{5}$ रु.

मान लीजिए अब x किलो वस्तु की खपत होती है।

$\therefore$ व्यय $= \left(x \times \frac{6}{5}\right)$ रु.

$\therefore \quad \frac{6}{5}x = 100$

या $\quad x = 100 \times \frac{5}{6} = \frac{250}{3}$ किलो

$\therefore$ अब खपत की गई वस्तु की मात्रा $= \frac{250}{3}$ किलो

$\therefore$ खपत में कमी $= \left(100 - \frac{250}{3}\right)$ किलो

$= \frac{50}{3}$ किलो

$= 16\frac{2}{3}$ किलो

$\therefore$ खपत में कमी हुई $16\frac{2}{3}\%$

प्रश्नावली 5.1

1. किसी शाला में विद्यार्थियों की संख्या 560 से बढ़कर 581 हो जाती है। ज्ञात कीजिए कि विद्यार्थियों की संख्या में कितने प्रतिशत वृद्धि हुई।

2. किसी शाला में विद्यार्थियों की संख्या 1200 से बढ़कर 1254 हो जाती है। ज्ञात कीजिए कि विद्यार्थियों की संख्या में कितने प्रतिशत वृद्धि हुई।

3. कोयले की खदान का संपूर्ण उत्पादन ज्ञात कीजिए यदि 24% व्यर्थ हो जाने के बाद शुद्ध उत्पादन 68400 क्विंटल है।

4. किसी शाला में विद्यार्थियों की संख्या 8% बढ़ने के पश्चात् 2160 हो गई। ज्ञात कीजिए कि शाला में विद्यार्थियों की मूल संख्या कितनी थी।

5. यदि किसी शाला में 60% विद्यार्थी लड़के हैं एवं पाठशाला में लड़कियों की कुल संख्या 460 है, शाला में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

6. सेब का मूल्य 25% घट जाने पर एक ग्राहक 240 रु. में 2 किलो सेब अधिक खरीद सकता है। ज्ञात कीजिए

   (i) प्रति किलो सेब का घटा हुआ मूल्य

   (ii) प्रति किलो सेब का मूल मूल्य

7. मूंगफली के मूल्य में 25% की वृद्धि होने पर एक व्यक्ति को 240 रु. में 1.5 किलो मूंगाफली कम प्राप्त होती है तो ज्ञात कीजिए

   (i) प्रति किलो मूंगफली का बढ़ा हुआ मूल्य

   (ii) प्रति किलो मूंगफली का मूल मूल्य

8. त्रैमासिक परीक्षा में एक विद्यार्थी को 30% अंक प्राप्त हुए एवं वह 12 अंकों से अनुत्तीर्ण हो गया। उसी परीक्षा में अन्य विद्यार्थी को 40% अंक प्राप्त हुए एवं ये अंक उत्तीर्ण होने के लिए आवश्यक न्यूनतम अंकों से 28 अधिक थे। ज्ञात कीजिए

   (i) अधितम अंक

   (ii) उत्तीर्ण प्रतिशत

9. एक परीक्षा में याकूब को 31% अंक प्राप्त हुए एवं वह 14 अंकों से अनुत्तीर्ण हो गया। उसी परीक्षा में सोनू को 43% अंक प्राप्त हुए एवं ये अंक उत्तीर्ण होने के लिए आवश्यक

न्यूनतम अंकों से 70 अधिक थे। ज्ञात कीजिए

(i) अधिकतम अंक

(ii) उत्तीर्ण होने के लिये प्राप्त न्यूनतम अंकों का प्रतिशत

10. दो उम्मीदवारों A एवं B के बीच होने वाले चुनाव में, A को डाले गए कुल मतों के 65% प्राप्त हुए एवं वह 2748 मतों से चुनाव जीत गया। डाले गए कुल मतों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि कोई भी मत अवैध घोषित न किया गया हो।

11. किसी वस्तु का मूल्य 60% बढ़ गया है। उपभोक्ता वस्तु का उपभोग कितने प्रतिशत कम कर दे जिससे कि उसके व्यय में वृद्धि न हो?

12. एक परीक्षा में, देवेंद्र को 360 अंक प्राप्त हुए। उसके अंकों का प्रतिशत 45 है। उसी परीक्षा में उसके मित्र मुबीन को 436 अंक प्राप्त हुए। मुबीन के अंकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

13. सोहन अपने वेतन का 14% बचत करता है, जबकि जार्ज 22% बचाता है। यदि दोनों को समान वेतन मिलता हो, और जार्ज 1540 रु. बचाता हो, तो सोहन की बचत और दोनों का वेतन ज्ञात कीजिए।

14. यदि A का वेतन B के वेतन से 50% अधिक है, तब A के वेतन से B का वेतन कितने प्रतिशत कम है?

15. चूने में, भार का 28.6% आक्सीजन रहती है। 750 ग्राम चूने में आक्सीजन के भार का निर्धारण कीजिए।

16. दो उम्मीदवारों A एवं B के बीच होने वाले चुनाव में, A को कुल वैध मतों के 55% प्राप्त हुए, 20% मत अवैध घोषित हुए। यदि मतों की कुल संख्या 7500 हो, तो उम्मीदवार B के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

17. एक व्यक्ति ने अपनी आय का 4% दान में दिया, शेष का 10% बैंक में जमा किया। अब यदि उसके पास 10800 रु. हैं, तो उसकी आय क्या थी?

18. अम्ल और पानी के 140 लीटर मिश्रण में 90% अम्ल तथा शेष पानी है। इस में कितना पानी मिलाया जाये कि परिणामी मिश्रण में पानी 12.5% हो जाये?

19. शान्ता के पास कुछ धन है। उसने दीपक को उस का 50% प्रतिशत एवं भूपेन्द्र को 30% दिया। शेष का 60% पाठशाला को दान में दे दिया। यदि अभी भी उसके पास 8040 रु. शेष हैं, तो ज्ञात कीजिए कि उसके पास प्रारंभ में कितना धन था।

5.3 लाभ और हानि

पिछली कक्षाओं में आपने लाभ और हानि के संबंध में पढ़ा है। यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य (Selling Price) उसके क्रय मूल्य (Cost Price) से अधिक है, तो हम कहते हैं कि लाभ हुआ है। इस के विपरीत यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से कम है, तब हम कहते हैं कि हानि हुई है।

इस प्रकार

यदि विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य, लाभ = विक्रये मूल्य - क्रय मूल्य

यदि विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य, हानि = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य

आप यह भी याद कीजिए लाभ (या हानि) की गणना क्रय मूल्य के प्रतिशत में निम्नानुसार की जाती है:

$$\text{लाभ}\% = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100, \text{और}$$

$$\text{हानि}\% = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

$$\text{या, लाभ} = \frac{\text{क्रय मूल्य} \times \text{लाभ}\%}{100}, \text{ और}$$

$$\text{हानि} = \frac{\text{क्रय मूल्य} \times \text{हानि}\%}{100}$$

या, $$\text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} = \frac{\text{क्रय मूल्य} \times \text{लाभ}\%}{100} \text{ और}$$

$$\text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य} = \frac{\text{क्रय मूल्य} \times \text{हानि}\%}{100}$$

$$\therefore \quad \text{विक्रय मूल्य} = \left(\frac{100 + \text{लाभ}\%}{100}\right) \text{क्रय मूल्य}$$

$$\therefore \quad \text{विक्रय मूल्य} = \left(\frac{100 - \text{हानि}\%}{100}\right) \text{क्रय मूल्य}$$

उपरोक्त विचारों को प्रदर्शित करने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 6 : एक दुकानदार 1200 रु. में एक कूलर खरीदता है, उसे ले जाने में 40 रु. और खर्च हुआ। यदि वह कूलर को 1550 रु. में बेचता है, तो उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए

हल : कूलर का क्रय मूल्य = $(1200 + 40)$ रु. = 1240 रु.

उसका विक्रय मूल्य = 1550 रु.

क्योंकि विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

$\therefore$ लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य = $(1550-1240)$ रु. = 310रु.

लाभ का प्रतिशत $= \frac{310}{1240} \times 100 = 25$

अतः दुकानदार को 25% लाभ होता है।

उदाहरण 7 : यदि 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य 12 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर हो, तो व्यापार में लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए वस्तु का क्रय मूल्य x रु. है।

तब 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य = $15x$ रु.

और 12 वस्तुओं का क्रय मूल्य = $12x$ रु.

किंतु 12 वस्तुओं का विक्रय मूल्य = 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य

$\therefore$ 12 वस्तुओं का विक्रय मूल्य = $15x$ रु.

इस प्रकार $12x$ रु. पर लाभ = $(15 - 12)x$ रु. = $3x$ रु.

लाभ प्रतिशत $= \frac{3x}{12x} \times 100$

$= 25$

इस प्रकार, व्यापार में लाभ = 25%

वैकल्पिक विधि

मान लीजिए एक वस्तु का क्रय मूल्य 1 रु. है। 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य = 15 रु.

और 12 वस्तुओं का क्रय मूल्य = 12 रु.। परंतु यह दिया है कि 12 वस्तुओं का विक्रय मूल्य = 15 वस्तुओं का क्रय मूल्य

∴ 12 वस्तुओं का विक्रय मूल्य = 15 रु.

12 वस्तुओं को बेचने पर लाभ = (15−12) रु. = 3 रु.

∴ लाभ प्रतिशत $= \frac{3 \times 100}{12 \times 1} = 25$

इस प्रकार लाभ = 25%

उदाहरण 8 : दामिनी ने 2000 रु. क्रय मूल्य वाली अलमारी 6% लाभ लेकर गुलाब को बेची। गुलाब ने उसे 5% हानि पर विक्रय किया। गुलाब ने अलमारी कितने रुपये में बेची?

हल : दामिनी के लिए अलमारी का क्रय मूल्य = 2000 रु.

दामिनी के द्वारा अर्जित लाभ = 2000 रु. का 6%

दामिनी के लिए अलमारी का विक्रय मूल्य $= \left(\frac{106}{100} \times 2000\right)$ रु. = 2120 रु.

गुलाब के लिए अलमारी का क्रय मूल्य = दामिनी के लिए अलमारी का विक्रय = 2120 रु.

गुलाब के लिए हानि = 5%

गुलाब के लिए अलमारी का विक्रय मूल्य $= \left(\frac{95}{100} \times 2120\right)$ रु. = 2014 रु.

इस प्रकार गुलाब ने अलमारी 2014 रु. में बेची।

उदाहरण 9 : एक दुकानदार किसी वस्तु को 12½% हानि पर बेचता है। यदि उस ने वस्तु को 51.80 रु. अधिक में बेचा होता, तो उसने 6% लाभ अर्जित किया होता। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : विधि 1

मान लीजिए कि क्रय मूल्य x रु. है।

तब, विक्रय मूल्य = $x - x$ का 12½% (क्यों?)

$$= x - \frac{25}{200}x$$

$$= x - \frac{x}{8}$$

$$= \frac{7}{8}x$$

यदि उस ने वस्तु को 51.80 रु. अधिक में बेचा होता अर्थात् $\left(\frac{7}{8}x + 51.80\right)$ रु. में, तो उसे 6% लाभ हुआ होता। अत: हमें प्राप्त होता हैं

$$\frac{7}{8}x + 51.80 = x + 0.06x$$

या $$(1 + 0.06 - 0.875)\ x = 51.80$$

या $$x = \frac{51.80}{0.185}$$

इसलिए, x = 280 रु., जो कि वस्तु का क्रय मूल्य है

विधि 2

मान लीजिए क्रय मूल्य 100 रु. है।

12½% हानि या 12.50 रु.

इसलिए विक्रय मूल्य = 87.50 रु.

6% का लाभ अर्जित करने के लिए उसे वस्तु को 106 रु. अर्थात् 18.50 रु. अधिक में बेचना चाहिए। दूसरे शब्दों में यदि दोनों विक्रय मूल्यों में अंतर 18.50 रु. है, तब क्रय मूल्य 100 रु. है। इसलिए 51.80 के अंतर के लिए

क्रय मूल्य = $\left(\frac{51.80}{18.50} \times 100\right)$

= 280 रु.

प्रश्नावली 5.2

1. एक दुकानदार 225 रु. में कलाई घड़ी खरीदता है और उसको सुधारने में 15 रु. व्यय करता है। यदि वह उसे 300 रु. में बेचता है, तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

2. सुशील ने 1300 रु. में दो संदूक खरीदे। एक संदूक को उसने 20% लाभ पर बेचा एवं दूसरे को 12% हानि पर। यदि दोनों का विक्रय मूल्य समान हो, तो प्रत्येक संदूक का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. दिनेश ने अपनी मोटर साइकिल 28% हानि पर नवीन को बेची। नवीन ने उसकी मरम्मत पर 1680 रु. खर्च किये और मोटरसाइकिल सरन को 35910 रु. में बेच दी, इस पर उसे 12.5% लाभ हुआ। ज्ञात कीजिए कि दिनेश के लिए मोटर साइकिल का क्रय मूल्य क्या था।

4. नफीस ने कम्प्यूटर तंत्र 40.000 रु. में खरीदा। उसने 4% हानि पर अफरोज़ को बेच दिया। अफरोज़ ने कितने रुपये खर्च किये? यदि अफरोज़ उसे विशाल को 40320 रु. में बेचता है, अफरोज़ के द्वारा अर्जित लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

5. यदि 20 वस्तुओं का विक्रय मूल्य 23 वस्तुओं के क्रय मूल्य के बराबर हो, तो लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

6. एक व्यापारी ने दो कूलर बेचे, प्रत्येक 2970 रु. में। एक कूलर को बेचने पर उसे 10% का लाभ हुआ, जबकि दूसरे पर 10% हानि हुई। व्यापारी का लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

7. शाहिद ने दो पुराने स्कूटर 9000 रु. में खरीदे। एक को 25% लाभ पर और दूसरे को 20% हानि पर बेचने में उसे न तो लाभ होता है न हानि। प्रत्येक स्कूटर का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. एक थोक व्यापारी फुटकर दुकानदार को 16 पेन के अंकित मूल्य (वस्तु पर छपा मूल्य) पर 20 पेन बेचता है। फुटकर दुकानदार उन्हें अंकित मूल्य पर बेचता है। फुटकर व्यापारी का लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

9. एक दोषपूर्ण ब्रीफकेस जिसकी कीमत 800 रु. है, 8% हानि पर बेचा जा रहा है। यदि कीमत 5% और कम कर दी जाये, तो उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

10. 90 बालपेन 160 रु. में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% घाटा होता हैं। 96 रु. में कितने बालपेन बेचे जाएं जिससे कि 20% लाभ हो।

11. यदि 10 कुर्सियों का क्रय मूल्य 16 कुर्सियों के विक्रय मूल्य के बराबर हो, तो लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
12. यदि 18 कुर्सियों का क्रय मूल्य 16 कुर्सियों के विक्रय मूल्य के बराबर हो, तो लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
13. दामोदर ने 30,000 रु. में दो भैंसें खरीदीं। एक को 15% हानि पर और दूसरी को 19% के लाभ में बेचने पर उसने पाया कि दोनों भैसों का विक्रय मूल्य समान है। प्रत्येक का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

5.4 बट्टा (Discount)

दुकानदार ग्राहकों (उपभोक्ताओं) को आकर्षित करने के लिए बहुत सी विधियों को खोज कर लेते हैं। कभी-कभी वे किसी वस्तु को उसके सूची मूल्य (list price)/अंकित मूल्य (marked price) से कम पर बेचते हैं। याद कीजिए कि फुटकर विक्रेता द्वारा सूची मूल्य में छूट दिया जाना ही बट्टा कहलाता है।

कभी-कभी दुकानदार द्वारा एक ही वस्तु पर एक से अधिक बट्टे प्रदान किये जाते हैं। किसी वस्तु के सूची मूल्य पर जब दो या अधिक बट्टे लगाए जाते हैं, वे बट्टा श्रेणी का निर्माण करते हैं। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक आगामी क्रमानुसार बट्टे का परिकलन पूर्व बट्टा दिए जाने के पश्चात् प्राप्त मूल्य पर किया जाता है याद कीजिए कि

बट्टा = सूची मूल्य × बट्टे की दर

विक्रय मूल्य = सूची मूल्य − बट्टा

अब उपरोक्त विचारों को प्रदर्शित करने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 10 : एक कमीज की कीमत 165 रु. थी और 12% बट्टे पर बेची गई। ज्ञात कीजिए कि कमीज़ पर कितना बट्टा दिया गया और उसका विक्रय मूल्य क्या था।

हल : कमीज़ पर अंकित मूल्य = 165 रु.

बट्टा = 165 रु. का 12%

∴ दिया गया बट्टा $= \left(\frac{12}{100} \times 165\right)$ रु. = 19.80 रु.

कमीज़ का विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य - बट्टा

= $(165.00 - 19.80)$ रु.

= 145.20 रु.

इस प्रकार प्रदत्त बट्टा है 19.80 और कमीज़ विक्रय मूल्य 145.20 रु.

उदाहरण 11 : एक डाइनिंग टेबिल का अंकित मूल्य 1350 रु. है। कुछ निश्चित बट्टा देने के पश्चात् उसे 1188 रु. में बेच दिया गया। बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

हल : डाइनिंग टेबिल का अंकित मूल्य = 1350 रु.

डाइनिंग टेबिल का विक्रय मूल्य = 1188 रु.

∴ प्रदत्त बट्टा = $(1350-1188)$ रु. = 162 रु.

∴ बट्टे की दर $= \left(\frac{162}{1350} \times 100\right)$ रु. = 12

इस प्रकार बट्टे की दर 12% है।

उदाहरण 12 : एक पंखे का सूची मूल्य 800 रु. है। वह 10% बट्टे पर बेचा जाता है। ऋतु परिवर्तन के कारण दुकानदार 5% अतिरिक्त बट्टा घोषित करता है। पंखे का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : पंखे का सूची मूल्य = 800 रु.

बट्टा = 800 रु. का 10%

प्रदत्त बट्टा $= \left(\frac{800 \times 10}{100}\right)$ रु. = 80 रु.

प्रथम बट्टा दिए जाने के पश्चात् पंखे का मूल्य = $(800-80)$रु. = 720 रु.

प्रदत्त ऋतु परिवर्तन बट्टा = 720 रु. का 5% $= \left(\frac{720 \times 5}{100}\right)$ रु. = 36 रु.

∴ पंखे का विक्रय मूल्य = $(720 - 36)$ रु. = 684 रु.

उदाहरण 13 : बट्टा श्रेणी 20%, 10%, 10% के समतुल्य एकल बट्टा ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए वस्तु का अंकित मूल्य 100 रु. है।

प्रथम बट्टा = 100 रु. का 20% = 20 रु.

प्रथम बट्टा दिए जाने के पश्चात वस्तु का मूल्य = (100–20) रु. = 80 रु.

द्वितीय बट्टा = 80 रु. का 10%

$$= \left(\frac{1}{10}\times 80\right) \text{ रु.} = 8 \text{ रु.}$$

द्वितीय बट्टा दिए जाने के पश्चात् वस्तु का मूल्य = (80–8) रु. = 72 रु.

तृतीय बट्टा = 72 रु. का 10% = 7.20 रु.

तृतीय बट्टा दिए जाने के पश्चात् वस्तु का मूल्य = (72 – 7.20) रु. = 64.80 रु.

∴ वस्तु पर प्रदत संपूर्ण बट्टा = (100 – 64.80) रु. = 35.20 रु.

इसलिए बट्टा श्रेणी 20%, 10% और 10% के समतुल्य एकल बट्टा 35.20% है।

उदाहरण 14 : एक दुकानदार एक टेबिल खरीदता है, जिसका सूची मूल्य 1500 रु. है और उसे 20% एवं 10% के क्रमानुसार बट्टे प्राप्त होते हैं। वह टेबिल की ढुलाई में 20 रु. खर्च करता है और उसे 20% लाभ पर बेच देता है। टेबिल का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : टेबिल का सूची मूल्य = 1500 रु.

प्रथम बट्टा = 1500 रु. का 20%

$$= \left[1500\times\frac{20}{100}\right] \text{ रु.} = 300 \text{ रु.}$$

प्रथम बट्टा दिए जाने के बाद टेबिल का मूल्य = (1500–300) रु. = 1200 रु.

द्वितीय बट्टा = 1200 रु. का 10% = 120 रु.

द्वितीय बट्टा दिए जाने के बाद टेबिल का मूल्य = (1200–120) रु. = 1080 रु.

दुकानदार ने ढुलाई में 20 रु. खर्च किये।

$\therefore$ दुकानदार के लिए टेबिल का क्रय मुल्य = (1080+20) रु. = 1100 रु.

लाभ = 1100 रु. का 20%

$\therefore$ टेबिल का विक्रय मूल्य $= 1100\left(1+\frac{20}{100}\right)$ रु. = 1320 रु.

प्रश्नावली 5.3

1. एक पुस्तक का सूची मूल्य 65 रु. है। वह 15% बट्टे पर बेची जाती है। पुस्तक का विक्रय मूल्य एवं उस पर प्रदत्त बट्टा ज्ञात कीजिए।

2. एक सिलाई मशीन का सूची मूल्य 2300 रु. है। वह 4% बट्टे पर बेची जाती है। सिलाई मशीन का विक्रय मूल्य एवं उस पर प्रदत्त बट्टा ज्ञात कीजिए।

3. एक वीडियो कैसेट का सूची मूल्य 100 रु. है। एक दुकानदार किसी निश्चित दर पर बट्टा देकर तीन वीडियो केसेट 274.50 रु. में बेचता है। प्रदत्त बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

4. निम्न प्रकरणों में से प्रत्येक में विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए

	सूची मूल्य	*बट्टा श्रेणी*
(i)	257.50 रु.	30%, 10%
(ii)	1475.80 रु.	25%, 10%, 5%
(iii)	4890.75 रु.	20%, 12.5%, 5%

5. एक दुकानदार 100 रु. सूची मूल्य वाली वस्तु क्रय करता हैं और 10% एवं 20% के क्रमानुसार बट्टे प्राप्त करता है। वह क्रय मूल्य का 10% ढुलाई आदि पर खर्च करता है। उस वस्तु को वह कितने मूल्य पर बेचे जिससे कि उसे 15% का लाभ हो।

6. एक वस्तु, जिसका सूची मूल्य 26580 रु. है, 10% बट्टे पर बेची जाती है। त्यौहार का मौसम होने के कारण दुकानदार 5% का अतिरिक्त बट्टा प्रदान करता है। वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. एक व्यापारी उस के स्टोर से क्रय की गई वस्तुओं पर 10% छूट को विज्ञापित करता है। जिस उपभोक्ता ने 560 रु. का सूटकेस, 90 रु. मूल्य का बैग और 45 रु. मूल्य की तौलिया क्रय किये, ज्ञात की जिए कि उसे कितना बट्टा प्राप्त हुआ।

8. एक कुर्सी, जिसका सूची मूल्य 350 रु., है, 25% एवं 10% के क्रमानुसार बट्टे पर उपलब्ध है। कुर्सी का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित बट्टा श्रेणियों में से प्रत्येक के समतुल्य एकल बट्टा ज्ञात कीजिए:

   (i) 25%, 20%, 10%

   (ii) 10%, 20%, 25%

   क्या ये बट्टा श्रेणियाँ एक ही एकल बट्टे के समतुल्य हैं।

10. कार का एक व्यापारी एक पुरानी मोटर साइकिल खरीदता है, जिसका सूची मूल्य 25000 रु. है, तथा उस पर 20% और 5% की छूट है। अब वह उसकी मरम्मत में 1000 रु. खर्च करता है और मोटर साइकिल को 25000 रु. में बेचता है। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

11. एक व्यापारी पुराना कूलर खरीदता है, जिसका सूची मूल्य 950 रु. है और उसे क्रमानुसार बट्टे 20% एवं 10% प्राप्त होते हैं। उसकी मरम्मत एवं रंग कराने में 66 रु. खर्च हुए। वह कूलर को 25% लाभ पर बेचता है। कूलर का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

12. एक प्रकाशक पुस्तक विक्रेता को 1574.80 रु. सूची मूल्य की पुस्तकें 20% बट्टे पर प्रदान करता है। यदि पुस्तक विक्रेता सूची मूल्य पर पुस्तकें विक्रय करता है और यदि उसका भाड़ा आदि में व्यय 45.40 रु. हुआ है तो उसका लाभ ज्ञात कीजिए।

13. एक घड़ी का सूची मूल्य 160 रु. है। दो क्रमानुसार बट्टे के पश्चात् घड़ी 122.40 रु. में बेची जाती है। यदि प्रथम बट्टा 10% हो, तो द्वितीय बट्टे की दर क्या है?

14. ग्राहक के लिए अधिक अनुकूल क्या है और कितने से? 680 रु. पर 14% का बट्टा या कि वही मूल्य और 10% एवं 5% के क्रमानुसार बट्टे?

15. एक व्यापारी ने 450 रु. में कलाई घड़ी खरीदी और उसका सूची मूल्य ऐसा नियत किया कि 10% बट्टा देने के बाद वह 20% लाभ अर्जित करे। कलाई घड़ी का सूची मूल्य ज्ञात कीजिए।

16. यदि एक दुकानदार वस्तुओं का सूची मूल्य उनके क्रय मूल्य से 50% अधिक रखता है और 40% बट्टा प्रदान करता है, तब उसका लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

5.5 बिक्री कर (Sales Tax)

शासन को विभिन्न प्रकार की सुविधाएँ प्रदान करना पड़ता हैं जैसे कि सड़कों का निर्माण और रख रखाव, सुरक्षा उपाय, पाठशालाएँ, चिकित्सालय आदि। संसाधन उत्पन्न करने के लिए शासन को भिन्न प्रकार के कर लगाने पड़ते हैं। बिक्री कर उन करों में से एक है। यह निर्दिष्ट दर से वस्तुओं के विक्रय मूल्य (सूची मूल्य या अंकित मूल्य) पर लगाया जाता है। विभिन्न वस्तुओं पर एंव विभिन्न प्रदेशों में बिक्री कर की दरें असमान होती हैं।

बिक्री कर का परिकलन निम्नानुसार होता है

(i) जब कोई बट्टा नहीं दिया गया हो - तो वस्तु का अंकित मूल्य ही विक्रय मूल्य होता है और बिक्री कर वस्तु की अंकित (सूची) मूल्य पर लगाया जाता है।

(ii) जब बट्टा दिया गया हो-पहले बट्टे का परिकलन किया जाता है तब बिक्री कर वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगाया जायेगा। बिक्री कर के परिकलन को प्रदर्शित करने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते है :

उदाहरण 15 : एक बैग का सूची मूल्य 500 रु. है। बिक्री कर की दर 4% है। उपभोक्ता को बैग के लिए कितना मूल्य देना होगा, इस की गणना कीजिए।

हल : बैग का सूची मूल्य = 500 रु.

बिक्री कर की दर = 4%

बिक्री कर = 500 रु. का $4\% = \left(\frac{4}{100} \times 500\right)$ = 20 रु.

इसलिए उपभोक्ता को बैग क्रय करने के लिए (500+20) = 520 रु. देने होंगे।

उदाहरण 16 : जूतों की एक जोड़ी पर अंकित मूल्य 600 रु. है। शालिनी ने बिक्री कर सहित उसे 660 रु. में क्रय किया। बिक्री कर की दर ज्ञात कीजिए।

हल : जूतों की जोड़ी का सूची मूल्य = 600 रु.

जूतों की जोड़ी का विक्रय मूल्य = 660 रु.

∴ बिक्री कर = (660−600) रु. = 60 रु.

यह बिक्री कर जूतों की जोड़ी के सूची मूल्य पर लगाया गया

इसलिए बिक्री कर की दर $= \frac{60}{600} \times 100 = 10\%$

उदाहरण 17 : प्रताप ने एक मोटर साइकिल बिक्री कर सहित 37388 में खरीदी। यदि बिक्री कर की दर 4% हो, तो मोटर साइकिल का सूची मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए मोटर साइकिल का सूची मूल्य = x रु.

बिक्री कर की दर = 4%

$\therefore$ बिक्री कर $= \left(\frac{4}{100} \times x\right)$ रु. $= \frac{x}{25}$ रु.

$\therefore$ मोटर साइकिल का विक्रय मूल्य $= \left(x + \frac{x}{25}\right)$ रु. $= \left(1 + \frac{1}{25}\right)$ रु.

$\therefore \quad \frac{26}{25}x = 37388$

$\therefore \quad x = \frac{37388 \times 25}{26} = 35950$ रु.

उदाहरण 18 : जैकब एक विभागीय भंडार जाता है एवं निम्न वस्तुएँ खरीदता है, उनके सूची मूल्य एवं बिक्री कर की दरें दी है।

(i) मच्छरदानी, मूल्य 120 रु., बिक्री कर @ 4%

(ii) प्रसाधन सामग्री, मूल्य 300 रु., बिक्री कर @ 15%

(iii) लेखन सामग्री, मूल्य 360 रु., बिक्री कर @ 2%

(iv) कमीज़, मूल्य 600 रु., बिक्री कर @ 9%

बिल को कुल देय राशि ज्ञात कीजिए (ध्यान दीजिए कि संकेत @ का अर्थ है *की दर पर*)

हल : मच्छरदानी का सूची मूल्य = 120.00 रु.

$\therefore$ बिक्री कर @ 4% $= \left(\frac{4}{100} \times 120\right)$ रु. = 4.80 रु.

प्रसाधन सामग्री का सूची मूल्य = 300.00 रु.

बिक्री कर @ 15% $= \left(\frac{15}{100} \times 300\right)$ रु. = 45.00 रु.

लेखन सामग्री का सूची मूल्य = 360.00 रु.

बिक्री कर @ 2% = $\left(\frac{2}{100}\times 360\right)$ रु. = 7.20 रु.

कमीज का सूची मूल्य = 600.00 रु.

बिक्री कर @ 9% = $\left(\frac{9}{100}\times 600\right)$ रु. = 54.00 रु.

बिल की कुल देय राशि

= [120.00+4.80+300.00+45.00+360.00+7.20+600.00 +54.00] रु.

= 1491.00 रु.

उदाहरण 19 : आशा दुकान पर एक पेटी क्रय करने जाती है जिसका मूल्य 981 रु. है। बिक्री कर की दर 9% है। आशा विक्रेता से अनुरोध करती है कि वह पेटी का मूल्य इतना कम कर दे कि बिक्री कर सहित उसे 981 रु. मूल्य देना पड़े। ज्ञात कीजिये कि पेटी के मूल्य में कितनी कटौती करनी होगी?

हल : मान लीजिए पेटी का घटा हुआ मूल्य x रु. है।

विक्रय मूल्य $=\left(x+\frac{9x}{100}\right)$ रु. $=\left(1+\frac{9}{100}\right)x$ रु. $=\frac{109}{100}x$ रु.

$\therefore \quad \frac{109}{100}x=981$

या, $\quad x=\left(\frac{981\times 100}{109}\right)$ रु. = 900 रु.

इसलिए पेटी के मूल्य में आवश्यक कटौती = (981–900) रु. = 81 रु.

उदाहरण 20 : एक सिलाई मशीन, 7% @ बिक्री कर सहित 1391 रु. में उपलब्ध है, उसका सूची मूल्य ज्ञात कीजिए। यदि बिक्री कर की दर 10% हो जाए, तब उसका विक्रय मूल्य क्या होगा?

हल : मान लीजिए सिलाई मशीन का सूची मूल्य x रु. है

बिक्री कर = x रु. का $7\% = \frac{7x}{100}$ रु.

सिलाई मशीन का विक्रय मूल्य $= \left(x+\frac{7x}{100}\right)$ रु. $= \left(1+\frac{7}{100}\right)x$ रु. $= \frac{107x}{100}$

$\therefore \quad \frac{107}{100}x = 1391$

$\therefore \quad x = \left(\frac{1391}{107}\times 100\right)$ रु. = 1300 रु.

जब बिक्री कर की दर 10% हो जाती है

बिक्री कर = $\frac{10\times 1300}{100}$ रु. = 130 रु.

$\therefore$ नवीन विक्रय मूल्य = $(1300 + 130)$ रु. = 1430 रु.

प्रश्नावली 5.4

1. एक टेलीविज़न सेट का सूची मूल्य 10500 रु. है। यदि बिक्री की दर 10% हो, तो ज्ञात कीजिए कि टेलीविज़न सेट के लिए कुल कितनी राशि देय होगी।
2. एक स्कूटर सूची मूल्य 25000 रु. है। यदि बिक्री कर की दर 8% हो तो स्कूटर के लिए कुल कितनी राशि देय होगी।
3. जूही ने प्रसाधन सामग्री बिक्री कर सहित 172.50 रु. में खरीदी। यदि बिक्री कर की दर 15% हो, तो प्रसाधन सामग्री का सूची मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. शिवम ने एक साइकिल बिक्री कर सहित 1664 रू में खरीदी। साइकिल का सूची मूल्य 1600 रु. है, बिक्री कर की दर ज्ञात कीजिए।
5. एक रेफ्रीजरेटर बिक्री कर सहित 9200 रु. में उपलब्ध है यदि बिक्री कर की दर 15% हो, तो रेफ्रीजरेटर का सूची मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. एक वस्तु, 10% दर से बिक्री कर सहित, 1430 रु. में उपलब्ध है। उस का सूची मूल्य ज्ञात कीजिए। यदि बिक्री कर की दर 12% हो जाये, तब उस का विक्रय मूल्य क्या होगा।

7. जूतों की एक जोड़ी का अंकित मूल्य 450 रु. है। यदि अर्पणा ने उस के लिए 45 रु. बिक्री कर दिया, तो बिक्री कर की दर ज्ञात कीजिए।

8. दिव्या ने प्रसाधन सामग्री का एक सेट 15% बिक्री कर सहित 345 रु. में एवं 10% बिक्री कर सहित 110 रु. में पर्स क्रय किये। संपूर्ण खरीद पर बिक्री कर किस दर से लिया गया है।

9. कपड़े धोने की मशीन का सूची मूल्य 9000 रु. है नगद भुगातान करने पर विक्रेता मशीन के सूची मूल्य पर 5% का बट्टा प्रदान करता है। यदि बिक्री कर की दर 10% हो, तो ग्राहक को उसे क्रय करने पर कितना नगद मूल्य देना होगा?

10. एक कूलर का सूची. मूल्य 2563 रु. है। बिक्री कर की दर 10% है। ग्राहक विक्रेता से अनुरोध करता है कि वह कूलर का मूल्य इतना कम कर दे कि बिक्री कर सहित उसे 2563 रु. विक्रय मूल्य देना पड़े। कूलर के मूल्य में आवश्यक कटौती ज्ञात कीजिए।

11. बलबीर एक विभागीय स्टोर जाता है एवं निम्न वस्तुएँ क्रय करता है जिनके सूची मूल्य एवं बिक्री कर की दरें निम्नानुसार हैं

    (i) लेखन सामग्री, मूल्य 50 रु., बिक्री कर @ 2%

    (ii) मच्छरदानी, मूल्य 250 रु., बिक्री कर @ 4%

    (iii) विडियो कैसेट, मूल्य 300 रु., बिक्री कर @ 15%

    (iv) आइसक्रीम पैकेट, मूल्य 200 रु., बिक्री कर @ 10%

    बिल की कुल राशी की गणना कीजिये।

12. रीता ने कार, जिसका अंकित मूल्य 210000, 5% बट्टे पर खरीदी। यदि बिक्री कर की दर 10% हो, तो ज्ञात कीजिए कि रीता को कार क्रय करने मे कितना मूल्य देना पड़ा।

13. अहमद एक मोटर साइकिल, जिसका अंकित मूल्य 46000 रु. है, 5% बट्टे पर क्रय करता है। यदि बिक्री कर दर 10% हो, तो ज्ञात कीजिए कि अहमद को मोटर साइकिल क्रय करने हेतु कितना मूल्य देना पड़ा।

14. कपड़े धोने की मशीन का विक्रय मूल्य 17658 रु. जिस में बिक्री कर भी समाहित है। यदि बिक्री कर के दर सूची मूल्य का 8% हो, तो कपड़े धोने की मशीन का सूची मूल्य ज्ञात कीजिए।

5.6 निर्वाह सूचकांक

सूचकांक (Index Number) एक दी हुई अवधि में निम्न में सापेक्ष परिवर्तन मापते है :

(i) भिन्न वस्तुओं के मूल्य (ii) औद्योगिक उत्पादन

(iii) कृषि उत्पादन (iv) आयात और निर्यात

(v) निर्वाह सूचकांक आदि।

परिवर्तनों के मापन के संदर्भ में हम एक वर्ष का चुनाव करते हैं। इस वर्ष को आधार वर्ष (base year) कहते हैं।

उदाहरण के लिए कथन कि जनवरी 2000 की तुल्य में जनवरी 2001 में थोक व्यापार मूल्य सूचकांक 108 है का अर्थ है कि जनवरी 2000 से जनवरी 2001 तक की एक वर्ष की अवधि में थोक व्यापार मूल्य में 8% की वृद्धि हुई।

निम्न तीन सूचकांक सर्वसामान्य के लिए उपयोगी हैं

(i) मूल्य सूचकांक (Price Index Number)

(ii) मात्रा सूचकांक (Quatity Index Number)

(iii) निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Index Number)

हम इस अनुच्छेद में केवल निर्वाह सूचकांक का अध्ययन करेंगे।

निर्वाह सूचकांक को ज्ञात करने की बहुत-सी विधियाँ बनाई गई हैं, लेकिन वर्तमान पाठ्य में हम उस विधि का अध्ययन करेंगे जिसे भारित समष्टि विधि (Weighted Aggregate Method) कहते हैं। इस विधि में किसी परिवार (या व्यक्तियों का समूह) द्वारा उपभोग की गई वस्तुओं की मात्रा को एक-सा लिया जाता है। उन्हे भार (Weights) माना जाता है। भिन्न मदों पर कुल खर्च का परिकलन दोनों आधार वर्ष और वर्तमान वर्ष के लिए किया जाता है। उस के पश्चात् निर्वाह सूचकांक की गणना निम्नानुसार की जाती है :

$$\text{निर्वाह सूचकांक} = \frac{\text{वर्तमान वर्ष में कुलखर्च}}{\text{आधार वर्ष में कुलखर्च}} \times 100$$

हम निर्वाह सूचकांक का परिकलन प्रदर्शित करने के लिए निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता लेते हैं

उदाहरण 21 : किसी परिवार के निम्न मदों पर मासिक खर्च वर्ष 1980 और 1991 के लिए निम्नानुसार है:

वस्तु	उपभोग की गई मात्रा (किलो में)	प्रति किलो मूल्य (रुपयों में)	
		1980 में	1991 में
गेंहू	35	5	8
चावल	10	18	22
चाय	2	80	100
मक्खन	2	30	50
शक्कर	14	10	16

उपरोक्त आँकड़ों से 1980 को आधार वर्ष मानकर 1991 के लिए निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

हल : हम निम्न सारणी में परिकलन को समझायेंगे :

वस्तु	मात्रा (किलो में)	प्रति किलो मूल्य (रुपयों में) 1980 में	कुल खर्च 1980 में	प्रति किलो मूल्य (रुपयों में) 1991 में	कुल खर्च 1991 में
गेंहू	35	5	175	8	280
चावल	10	18	180	22	220
चाय	2	80	160	100	200
मक्खन	2	30	60	50	100
शक्कर	10	10	140	16	224
			715		1024

$$\therefore \text{ 1991 का निर्वाह सूचकांक} = \frac{\text{1991 में कुल खर्च}}{\text{1980 में कुल खर्च}} \times 100$$

1980 को आधार वर्ष मानकर

$$= \frac{1024}{715} \times 100$$

$$= 143.22 \text{ (लगभग)}$$

उदाहरण 22 : एक परिवार का उपभोग करने योग्य कुछ वस्तुओं का वर्ष 1990 में कुल खर्च 10,000 रु. पाया गया यदि 1990 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 1998 का निर्वाह सूचकांक 142.5 हो, तो उस परिवार का उन्हीं वस्तुओं की उतनी ही मात्रा का 1998 में खर्च ज्ञात कीजिए।

हल : निर्वाह सूचकांक $= \dfrac{\text{1998 में कुल खर्च}}{\text{1990 में कुल खर्च}} \times 100$

या $142.5 = \dfrac{\text{1998 में कुल खर्च}}{1000} \times 100$

या 1998 में कुल खर्च = 14250 रु.

$\therefore$ परिवार का उन्हीं वस्तुओं का 1998 में कुल खर्च 14250 रु. है

प्रश्नावली 5.5

1. 1992 को आधार वर्ष मानकर, भारित समष्टि विधि का उपयोग करके, निम्नलिखित आँकड़ों से, वर्ष 1996 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	उपभोग की गई मात्रा	आधार वर्ष 1992 में मूल्य (रुपयों में)	वर्तमान वर्ष 1996 में मूल्य (रुपयों में)
चावल	100 किलो	12.00 प्रति किलो	15.00 प्रति किलो
गेंहू	180 किलो	5.00 प्रति किलो	7.00 प्रति किलो
दाल	40 किलो	15.50 प्रति किलो	20.00 प्रति किलो
शक्कर	45 किलो	10.80 प्रति किलो	12.00 प्रति किलो
चाय	6 किलो	70.00 प्रति किलो	90.00 प्रति किलो
कापियाँ	40 नग	7.00 प्रति नग	10.00 प्रति नग
जूते	4 जोड़ी	150.00 प्रति जोड़ी	300.00 प्रति जोड़ी

2. 1985 को आधार वर्ष मानकर, भारित समष्टि विधि का उपयोग करके, निम्नलिखित आँकड़ों से, वर्ष 1990 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	उपभोग की गई मात्रा	आधार वर्ष 1985 में मूल्य (रुपयों में)	वर्तमान वर्ष 1990 में मूल्य (रुपयों में)
आलू	30 किलो	3.00 प्रति किलो	5.00 प्रति किलो
प्याज	20 किलो	4.00 प्रति किलो	6.00 प्रति किलो
टमाटर	10 किलो	6.00 प्रति किलो	7.00 प्रति किलो
बैंगन	15 किलो	5.00 प्रति किलो	6.00 प्रति किलो
साबुन	25 नग	6.00 प्रति नग	8.00 प्रति नग
नारियल	10 नग	4.00 प्रति नग	5.00 प्रति नग

3. 1990 को आधार वर्ष मानकर भारित समष्टि विधि का उपयोग करके, निम्नलिखित आँकड़ों से वर्ष 1996 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	उपभोग की गई मात्रा	आधार वर्ष 1990 में मूल्य (रुपयों में)	वर्तमान वर्ष 1996 में मूल्य (रुपयों में)
साबुन	25 नग	8.00 प्रति नग	9.00 प्रति नग
कापियाँ	40 नग	7.00 प्रति नग	10.00 प्रति नग
नारियल	10 नग	4.00 प्रति नग	5.00 प्रति नग
पोशाक	4 नग	140.00 प्रति नग	200.00 प्रति नग
जूते	4 जोड़ी	140.00 प्रति जोड़ी	300.00 प्रति जोड़ी

4. 1994 को आधार वर्ष मानकर, निम्न आँकड़ों से 1999 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	उपभोग की गई मात्रा (किलो में)	मूल्य प्रति किलो (रुपयों में)	
		1994 में	1999 में
A	12	15.00	18.00
B	4	16.00	29.50
C	15	35.00	40.00
D	20	12.00	14.00
E	8	7.00	8.00

5. 1990 को आधार वर्ष मानकर, निम्न आँकड़ों से 1995 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	मात्रा (इकाइयों में)	मूल्य प्रति किलोग्राम (रुपयों में)	
		1990 में	1995 में
A	40	9.00	15.00
B	18	10.00	12.00
C	12	6.00	11.00
D	8	30.00	45.00
E	5	18.00	16.00

6. 1990 को आधार वर्ष मानकर, निम्न आँकड़ों से 1995 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	मात्रा (इकाइयों में)	मूल्य प्रति इकाइ (रुपयों में)	
		1990 में	1995 में
A	4	25.00	37.50
B	10	40.00	52.00
C	16	7.00	10.00
D	20	6.00	9.00
E	20	16.00	28.00
F	120	8.00	10.00

7. 1995 को आधार वर्ष मानकर, निम्न आँकड़ों से वर्ष 1998 का निर्वाह सूचकांक ज्ञात कीजिए।

वस्तु	उपभोग की गई मात्रा (किलो में)	दर प्रति किलो (रुपयों में)	
		1995 में	1998 में
A	27	30.00	37.00
B	15	35.00	40.00
C	11	12.00	16.00
D	9	18.00	22.00
E	8	22.00	15.10

8. एक परिवार का 1985 में भिन्न परिवारिक वस्तुओं की निश्चित मात्रा का कुल खर्च 6000 रु. था और 1985 को आधार वर्ष मानकर 1996 का निर्वाह सूचकांक 172.50 था। ज्ञात कीजिए कि परिवार ने उन्हीं वस्तुओं की उतनी ही मात्रा का वर्ष 1996 में कितना खर्च किया।

9. एक परिवार का 1991 में पांच परिवारिक वस्तुओं की निश्चित मात्रा का खर्च 7500 रु. था। 1991 को आधार वर्ष मानकर 1994 का निर्वाह सूचकांक 130.5 है, तो ज्ञात कीजिए कि परिवार का उन्हीं पाँच परिवारिक वस्तुओं की उतनी ही मात्रा का 1994 में कुल खर्च कितना हुआ।

अध्याय 6

चक्रवृद्धि ब्याज

6.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में हमने साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज के संबंध में पढ़ा है। याद कीजिए कि जब हम कुछ समयावधि के लिए किसी संस्था (बैंक, वित्तीय संस्था या व्यक्ति) जिसे *ऋणदाता* कहते हैं, से धन उधार लेते हैं, तब हमें उधार लिए गए धन के साथ कुछ अतिरिक्त राशि भी देनी पड़ती है, जो कि उसके धन का उपयोग करने की सुविधा के बदले देय है। इस अतिरिक्त धन को जो हम देते हैं, उसे *ब्याज* (Interest) कहते हैं तथा उधार लिए गए धन को *मूलधन* (Principal) कहते हैं। मूलधन और ब्याज के योग को *मिश्रधन* (Amount) कहते हैं। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है, $A = P + I$, जहाँ A, P और I क्रमशः मिश्रधन, मूलधन और ब्याज को दर्शाते हैं। आप को यह भी याद होगा कि संपूर्ण ऋण अवधि के लिए यदि मूलधन एकसा बना रहता है, तो उस पर प्राप्त ब्याज को साधारण ब्याज (Simple Interest) कहते हैं और यदि कुछ अंतराल के बाद मूलधन में अर्जित ब्याज जोड़ने के कारण नया मूलधन प्राप्त होता है जो कि संपूर्ण ऋण अवधि के लिए एक सा नहीं रहता तो इस नए मूलधन पर प्राप्त ब्याज को *चक्रवृद्धि ब्याज* (Compound Interest) कहते हैं। पिछली कक्षाओं में साधारण ब्याज I की गणना का निम्न सूत्र पढ़ा है

$$I = \frac{PRT}{100}$$

(जहाँ P मूलधन, R% ब्याज की वार्षिक दर, और T वर्षों में समय है), और हमने मिश्रधन और चक्रवृद्धि की गणना निम्न सूत्र से की है

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित है, जहाँ A मिश्रधन है, P मूलधन है, R% ब्याज की वार्षिक दर है और n वर्षों की संख्या है (अर्थात् समयावधि)। लेकिन, ब्याज की गणना हमेशा वार्षिक नहीं होती। कई बार इसकी गणना *अर्ध-वार्षिक* (अर्थात् वर्ष में दो बार) या *तिमाही* (अर्थात् वर्ष में चार बार) होती है। इस पर ध्यान दें कि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, एक विशिष्ट ब्याजावधि से अगली अवधि के बीच का समय *रूपान्तरण अवधि काल* (conversion period) कहलाता है। यदि यह विशिष्ट अवधि एक वर्ष है (अर्थात् ब्याज एक वर्ष में संयोजित होता है), तब वर्ष में *एक* रूपान्तरण अवधि है, यदि यह अवधि छः माह है (अर्थात् ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित होता है) तब वर्ष में *दो* रूपान्तरण अवधि हैं और यदि यह अवधि तीन माह है (अर्थात् ब्याज तिमाही संयोजित होता है), तब वर्ष में *चार* रूपान्तरण अवधि हैं। उपरोक्त व्याख्या को दृष्टि में रखकर, हम सूत्र का पुनर्कथन करते हैं

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

जहाँ A मिश्रधन है, P मूलधन है और R% प्रति रूपान्तरण अवधि के ब्याज की दर है और n *रूपान्तरण अवधि* की कुल संख्या है। निम्न सूत्र से चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन किया जा सकता है।

$$\text{C.I.} = A - P = P\left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

टिप्पणी : स्पष्टतः यदि ब्याज की वार्षिक दर 8% है और यदि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित होता है, तब प्रति रूपान्तरण अवधि ब्याज की दर $\frac{1}{2}\times 8\%$ अर्थात् 4% है। यदि ब्याज तिमाही संयोजित होता है, तब प्रति रूपान्तरण अवधि (तीन माह) में ब्याज की दर $\frac{1}{4}\times 8\%$ अर्थात् 2% है।

इस सूत्र का उपयोग प्रदर्शित करने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं:

उदाहरण 1 : 2000 रु. का 8% वार्षिक दर से दो वर्ष पश्चात् मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

हल : सूत्र $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$, का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$A = 2000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 \text{ रु.}$$

$$= 2000\left(\frac{27}{25}\right)^2 \text{ रु.}$$

$$= 2332.80 \text{ रु.}$$

इस प्रकार मिश्रधन 2332.80 रु. है।

और चक्रवृद्धि ब्याज, C.I. = $A - P$

= (2332.80 – 2000) रु.

= 332.80 रु.

उदाहरण 2 : 2000 रु. का 8% वार्षिक दर से एक वर्ष पश्चात् मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित होता है।

हल : यहाँ, $P =$ 2000 रु.,

ब्याज की दर प्रति वर्ष = 8%

इसलिए, ब्याज की दर प्रति रूपान्तरण अवधि (अर्थात् छः माह) $= \frac{1}{2} \times 8\% = 4\%$ (अर्थात् $R = 4$) और एक वर्ष की अवधि में रूपान्तरण अवधि की संख्या = 2 × 1 = 2 (अर्थात् $n = 2$)

अब, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$, का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$A = 2000\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 \text{ रु.}$$

$$= 2000 \times \left(\frac{26}{25}\right)^2 = 2163.20 \text{ रु.}$$

इस प्रकार, मिश्रधन = 2163.20 रु.

तथा चक्रवृद्धि ब्याज = (2163.20 − 2000) रु.

= 163.20 रु.

उदाहरण 3 : 8000 रु. पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष का 10% प्रति वर्ष की दर से चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन कीजिए जबकि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित हो।

हल : यहाँ P = 8000 रु. $R=\frac{10}{2}=5$ और $n=2\times\frac{3}{2}=3$

इस प्रकार, $A=P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ से हमें प्राप्त होता है

$$A = 8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 \text{ रु.}$$

$$= 8000\left(\frac{21}{20}\right)^3 \text{ रु.}$$

$$= 9261 \text{ रु.}$$

अब, C.I. = A−P

= (9261 − 8000) रु.

= 1261 रु.

अतः, अभीष्ट चक्रवृद्धि ब्याज 1261 रु. है।

उदाहरण 4 : कोई धन तीन वर्षों में स्वयं का $\frac{216}{125}$ गुना हो जाता है, ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए मूलधन = P एवं ब्याज की दर प्रति वर्ष = R%

अतः $n = 3$ और $A=\frac{216}{125}P$

इसलिए, सूत्र $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$, से प्राप्त होता है

$$\frac{216}{125}P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

या $$\frac{216}{125} = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

या $$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

या $$\frac{6}{5} = 1+\frac{R}{100}$$

अर्थात् $$1+\frac{1}{5} = 1+\frac{R}{100}$$

या $$\frac{1}{5} = \frac{R}{100}$$

या $$R = 20$$

इसलिए ब्याज की दर प्रतिवर्ष 20% है।

उदाहरण 5 : यदि 4% वार्षिक ब्याज की दर से कोई धन एक वर्ष के अंत में 7803 रु. हो जाता है, तो वह धन ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित हो।

हल : यहाँ A = 7803 रु., $R = \frac{1}{2}\times 4 = 2$ और $n = 2\times 1 = 2$, P (रु. में) = ?

इस प्रकार हमें प्राप्त होता है

$$7803 = P\left(1+\frac{2}{100}\right)^2$$

या $$P = \frac{7803\times 50\times 50}{51\times 51} = 7500$$

इस प्रकार लगाया गया धन 7500 रु. है।

उदाहरण 6 : 16000 रु. जबकि ब्याज 10% प्रतिवर्ष अर्ध-वार्षिक संयोजित हो, कुछ समय पश्चात् 18522 रु. हो जाता है, तो धन लगाने की समयावधि ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $P = 16000$ रु., $A = 18522$ रु., $R = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ और $n = ?$

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n \text{, से हमें प्राप्त होता है}$$

$$18522 = 16000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$$

या $$\frac{18522}{16000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

या $$\frac{9261}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

या $$\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n$$

या $$n = 3$$

इसलिए धन लगाने की समयावधि 3 अर्ध-वर्ष अर्थात् $1\frac{1}{2}$ वर्ष है।

उदाहरण 7 : निखिल ने एक कंपनी में अर्ध-वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज के संयोजन पर 6000 रु. लगाए। 18 माह पश्चात् कंपनी ने उसे 7986 रु. लौटाए। ब्याज की दर प्रतिवर्ष ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित होता है अर्थात् प्रत्येक छः माह पश्चात्।

समय = 18 माह अर्थात् $\frac{18}{6} = 3$ रूपांतरण अवधि

इसलिए, $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$, से हमें प्राप्त होता है

$$7986 = 6000\left(1+\frac{R}{100}\right)^3,$$

या $$\frac{7986}{6000} = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

या $$\frac{1331}{1000} = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

या $$\left(\frac{11}{10}\right)^3 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

या $$\frac{11}{10} = 1+\frac{R}{100}$$

या $$\frac{11}{10} - 1 = \frac{R}{100}$$

या $$\frac{1}{10} = \frac{R}{100}$$

या $$R = 10$$

अर्थात् ब्याज की दर प्रति रूपान्तरण अवधि (प्रति अर्ध-वर्ष) 10% है

$\therefore$ ब्याज की दर प्रतिवर्ष = $2 \times 10\% = 20\%$

उदाहरण 8 : एक किसान अपनी दो पुत्रियों, जो कि 16 वर्ष और 18 वर्ष की हैं, के बीच में 390300 रु. इस प्रकार बाँटना चाहता है कि उनको धन पर 4% प्रतिवर्ष, वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज द्वारा प्रत्येक को 21 वर्ष की आयु होने पर एकसा मिश्रधन प्राप्त हो। वह अपने धन को किस प्रकार बाँटे?

हल : मान लीजिए कि 16 वर्ष की आयु वाली पुत्री को दिया गया अंश = P रु.

$\therefore$ 18 वर्ष की आयु वाली पुत्री को प्राप्त अंश = (390300−P)

21 वर्ष की आयु में दोनों को समान धन मिलता है अर्थात् P रु., 5 वर्ष तक ब्याज पर लगाया गया और (390300−P रु.), 3 वर्ष तक ब्याज पर लगाया गया।

$$\therefore \quad P\left(1+\frac{4}{100}\right)^5 = (390300 - P)\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$$

या $$P\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 = (390300 - P)$$

या $$P + \left(\frac{26}{25}\right)^2 + P = 390300$$

$$\left[1+\left(\frac{26}{25}\right)^2\right]P = 390300$$

या $$\left[\frac{625+676}{625}\right]P = 390300$$

या $$P = \frac{390300 \times 625}{1301} = 187500$$

इसलिए, 16 वर्ष की आयु की पुत्री को 187500 रु. प्राप्त होते हैं और 18 वर्ष की आयु की पुत्री को (390300 − 187500) रु. = 202800 रु., मिलते हैं।

प्रश्नावली 6.1

1. 24000 रु. को 10% प्रतिवर्ष ब्याज की दर पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष पश्चात् कितना मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होगा जबकि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित होता है।
2. 100000 रु. को 4% प्रतिवर्ष की दर पर 9 माह पश्चात् कितना मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होगा जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है।
[संकेत : यहाँ, $R = \frac{1}{4} \times 4 = 1, n = \frac{9}{3} = 3$ तिमाही]
3. कितने वर्षों में 6400 रु. का धन 5% प्रति वर्ष की दर पर 6561 रु. हो जाएगा जबकि ब्याज त्रैमासिक संयोजित होता है।
4. कौन सा धन 4% प्रति वर्ष की दर पर $1\frac{1}{2}$ वर्षों के पश्चात् 132651 रु. हो जाएगा जबकि ब्याज अर्ध वार्षिक संयोजित होता है।
5. कोई धन 2 वर्षों में स्वयं का $\frac{25}{16}$ गुना हो जाता है, जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

6. 25,000 रु. का धन 8% प्रति वर्ष की दर पर अर्ध-वार्षिक संयोजन से 28121.60 रु. हो जाता है। समय की अवधि का परिकलन कीजिए।

7. 3200 रु. का धन 10% प्रति वर्ष की दर पर त्रैमासिक संयोजन से 3362 रु. हो जाता है। समय की अवधि ज्ञात कीजिए।

8. कोई धन ब्याज के वार्षिक संयोजन से दो वर्षों में 9680 रु. और 3 वर्षों में 10648 रु. हो जाता है। राशि (मूलधन) एवं ब्याज की दर प्रतिवर्ष ज्ञात कीजिए।

9. A और B ने क्रमशः 60000 रु. और 50000 रु. तीन वर्षों के लिए उधार लिए। A ने 10% प्रति वर्ष की दर से साधारण ब्याज दिया, जब कि B ने 10% प्रतिवर्ष की दर पर वार्षिक संयोजन से चक्रवृद्धि ब्याज दिया। ज्ञात कीजिए कि किसने अधिक ब्याज दिया और कितना अधिक?

10. 195150 रु. को A एवं B में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि A को 2 वर्षों के पश्चात् वही धन मिले जो कि B को 4 वर्षों के पश्चात् मिले। ब्याज वार्षिक संयोजित होता है तथा दर 4% प्रति वर्ष है।

11. 5000 रु. का 10% प्रति वर्ष की दर पर 2 वर्ष 6 माह पश्चात् देय मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन कीजिए जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित होता है।

    [संकेत : सूत्र $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ का उपयोग करके ज्ञात कीजिए कि 2 वर्ष पश्चात् मिश्रधन कितना हो जाएगा, और तब $\frac{1}{2}$ वर्ष के ब्याज की गणना, सूत्र $I = \frac{P'RT}{100}$ से कीजिए, जहाँ P', 2 वर्षों पश्चात् मिश्रधन है।]

12. किस धन का 10% प्रति वर्ष की दर पर दो वर्षों के पश्चात् चक्रवृद्धि ब्याज 6615 रु. हो जाएगा जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित हो।

13. सेमुएल ने आवास विकास परिषद से ऋण पर मकान खरीदा। यदि मकान का क्रय मूल्य 256000 रु. है, तो ज्ञात कीजिए कि सेमुएल ने 5% वार्षिक दर पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष पश्चात् कितना ब्याज एवं मिश्रधन दिया जबकि ब्याज अर्ध वार्षिक संयोजित हो।

14. कितने समय में 2400 रु. का 10% प्रतिवर्ष की दर पर मिश्रधन 2646 रु. हो जाएगा जबकि ब्याज अर्ध वार्षिक संयोजित हो।

15. पद्मा ने 30000 रु. एक फाइनेंस कंपनी में ब्याज पर जमा किए और $1\frac{1}{2}$ वर्षो पश्चात् उसे 39930 रु. वापिस मिले। यदि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित हो, तो ब्याज की दर प्रति वर्ष ज्ञात कीजिए।

16. कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज से जबकि ब्याज अर्ध-वार्षिक संयोजित हो एक वर्ष में 13230 रु. और $1\frac{1}{2}$ वर्षों में 13891.50 रु. हो जाता है मूलधन एवं ब्याज की दर प्रति वर्ष ज्ञात कीजिए।

17. सुब्रामनिअम ने कृष्णमूर्त्ति से कुछ धन साधारण ब्याज की दर पर 2 वर्ष के लिए ऋण पर लिया। उसने यह धन उतने ही समय के लिए उसी दर पर चक्रवृद्धि ब्याज से वेंकट को उधार दिया जबकि ब्याज वार्षिक संयोजित हो। दो वर्षों के पश्चात् उसे चक्रवृद्धि ब्याज के रूप में 4200 रु. मिले किंतु उसने साधारण ब्याज में केवल 4000 रु. दिए। धन और ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

18. चक्रवृद्धि ब्याज की किस दर पर कोई धन 3 वर्षो में स्वयं का $\frac{125}{64}$ गुना हो जाता है?

19. कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज पर 15 वर्षों में स्वयं का दुगुना हो जाता है। कितने वर्षों में वह आठ गुना हो जाएगा?

20. 8000 रु. का 10% प्रति वर्ष की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याजों का अंतर ज्ञात कीजिए जब कि ब्याज वार्षिक और अर्ध-वार्षिक संयोजित हो।

6.2 वृद्धि और अवमूल्यन

मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन करते हुए हम ने देखा है कि समय की कुछ अवधि के पश्चात् धन में वृद्धि होती है। यह दूसरे क्षेत्रों में भी हो सकता है, जैसे जनसंख्या में वृद्धि, वस्तुओं की कीमत में वृद्धि आदि इसलिए उन क्षेत्रों में भी वृद्धि से संबंधित समस्याओं को हम चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का उपयोग करके हल कर सकते हैं, यथा

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

यहाँ A, उन्नत मान (या बढ़ा हुआ मान) है

P मूल मान है,

R% वृद्धि की दर प्रति वर्ष है

n वर्षों की संख्या है।

हम इस सूत्र का उपयोग को निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 9 : एक गाँव की जनसंख्या 24000 है। यह 5% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही है। 3 वर्षों पश्चात् जनसंख्या में वृद्धि क्या होगी?

हल : $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ का उपयोग करके हमें प्राप्त होता है

$$A = 24000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 24000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$

$$= 27783$$

∴ जनसंख्या में वृद्धि (या बढ़ोत्तरी)

$$= 27783 - 24000$$

$$= 3783$$

ध्यान रहे कि बहुधा कुछ वस्तुओं का मूल्य किसी समयावधि के पश्चात् घट (अवमूल्यन) सकता है। उदाहरण के लिए अगर आप वर्ष 2001 में एक कार खरीदते हैं, तो एक या अधिक वर्षों तक उसका उपयोग करने के पश्चात् उस का मूल्य वही नहीं रहेगा। हम वस्तु के घटे हुए मान का परिकलन उपरोक्त सूत्र से कर सकते हैं, इस अन्तर के सिवाय कि R को (–R) से बदल देते हैं। इस प्रकार,

$$\text{अवमूल्यन मान} = P\left(1-\frac{R}{100}\right)^n$$

इस सूत्र के उपयोग को हम निम्न उदाहरण से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 10 : एक रेफ्रीजरेटर का मूल्य 8000 रु. है। उसके मूल्य में 10% प्रतिवर्ष की दर से अवमूल्यन होता है। तीन वर्षों के पश्चात् उसके मूल्य में कुल कितना अवमूल्यन होगा, परिकलन कीजिए।

हल : रेफ्रीजरेटर के अवमूल्यन की वार्षिक दर R = 10% प्रति वर्ष, समय जिसके पश्चात् अवमूल्यन का परिकलन करना है, $n = 3$ वर्ष। रेफ्रीजरेटर का वर्तमान मूल्य P = 8000 रु.

अब $$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

का उपयोग करने पर हमें रुपयों में अवनत मूल्य प्राप्त होता है।

$$= 8000\left(1 - \frac{10}{100}\right)^3$$

$$= 8000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$= 5832$$

$\therefore$ रुपयों में अवमूल्यन

$$= 8000 - 5832$$

$$= 2168$$

कभी कभी वृद्धि की दर या अवमूल्यन की दर समय-समय पर बदलती रहती है। ऐसी स्थितियों में उन्नत मान या अवमूल्यन मान की गणना हम एक उदाहरण के द्वारा समझायेंगे।

उदाहरण 11 : एक नदी के सेतु का निर्माण चार वर्षों में पूरा करने के लिए 10000 श्रमिकों को नियुक्त किया गया। प्रथम वर्ष के अंत में 10% श्रमिकों को कार्यमुक्त कर दिया गया। द्वितीय वर्ष के अंत में, उस समय के श्रमिकों में से 5% को कार्यमुक्त किया गया। किन्तु परियोजना को समय पर पूर्ण करने हेतु तीसरे वर्ष की समाप्ति पर श्रमिकों की संख्या 10% बढ़ा दी गई। चौथे वर्ष की अवधि में कितने श्रमिक कार्यरत थे?

उत्तर : प्रथम वर्ष के प्रारंभ में श्रमिकों की संख्या = 10000

प्रथम वर्ष में श्रमिकों की संख्या में कमी की दर = 10%

द्वितीय वर्ष में श्रमिकों की संख्या में कमी की दर = 5%

तृतीय वर्ष में श्रमिकों की संख्या में वृद्धि की दर = 10%

∴ प्रथम वर्ष के अंत में श्रमिकों की संख्या

$$= 10000\left(1-\frac{10}{100}\right)$$

∴ द्वितीय वर्ष के लिए श्रमिकों की संख्या

$$= 10000\left(1-\frac{10}{100}\right)$$

द्वितीय वर्ष में ह्रास की दर 5% है

∴ द्वितीय वर्ष के अंत में श्रमिकों की संख्या

$$= 10000\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{5}{100}\right)$$

∴ तृतीय वर्ष के लिए श्रमिकों की संख्या

$$= 10000\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{5}{100}\right)$$

तृतीय वर्ष के अंत में श्रमिकों की संख्या में वृद्धि की दर = 10%

∴ तृतीय वर्ष के अंत में श्रमिकों की संख्या

$$= 10000\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

$$= 10000\times\frac{9}{10}\times\frac{19}{20}\times\frac{11}{10} = 9405$$

इसलिए चौथे वर्ष की अवधि में कार्यरत श्रमिकों की संख्या 9405 है

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट है कि यदि प्राप्त वर्ष में वृद्धि की दर $R_1\%$ है, और दूसरे वर्ष में वृद्धि की दर $R_2\%$ है और तृतीय वर्ष में वृद्धि की दर $R_3\%$ है आदि, तब मद A का अंतिम मान

$$= P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)\left(1+\frac{R_2}{100}\right)\left(1+\frac{R_3}{100}\right)$$

और यदि किसी वर्ष में ह्रास होता है तब उस स्थिति में दर का चिह्न ऋणात्मक लिया जाएगा। उदाहरण के लिए यदि वृद्धि की दर प्रथम वर्ष में $R_1\%$, द्वितीय वर्ष में $R_2\%$ और तृतीय वर्ष में अवमूल्यन की दर $R_3\%$ है, तब तृतीय वर्ष के अंत में मद का मान होगा

$$= P\left(1+\frac{R_1}{100}\right)\left(1+\frac{R_2}{100}\right)\left(1-\frac{R_3}{100}\right)$$

प्रश्नावली 6.2

1. एक रेफ्रीजरेटर का मूल्य 9000 रु. है। उसके अवमूल्यन की दर 5% प्रति वर्ष है। दो वर्षों के पश्चात् उस के मूल्य में कुल कितना अवमूल्यन होगा।
2. 400000 रु. में एक नई कार खरीदी जाती है। उसके मूल्य में 10% प्रति वर्ष की दर से अवमूल्यन होता है चार वर्षों के पश्चात् उसका मूल्य क्या होगा?
3. दीनू ने 24000 रु. में स्कूटर खरीदा। स्कूटर के मूल्य का 5% प्रति वर्ष की दर से अवमूल्यन हो रहा है। तीन वर्षों के पश्चात् उस के मूल्य की गणना कीजिए।
4. एक टेलीविज़न सेट का मूल्य वर्ष 1999 के प्रारंभ में 17000 रु. था 2000 के प्रारंभ में उस के मूल्य में 5% की वृद्धि की गई। मांग की कमी के कारण, 2001 के आरंभ में मूल्य में 4% का अवमूल्यन किया गया। 2001 में टेलीविज़न का मूल्य क्या है?
5. किसी संपत्ति के मूल्य का प्रति वर्ष 5% की दर से अवमूल्यन होता है। यदि तीन वर्षों के पश्चात् उसका मूल्य 411540 रु. है तो, इन तीन वर्षों के प्रारंभ में इसका मूल्य क्या था?

   [संकेत : यहाँ A = 411540, P निकालिए]
6. अफ्रीदी ने एक पुराना स्कूटर 16000 रु. में खरीदा। यदि दो वर्षों के पश्चात् उसका मूल्य घट कर 14440 रु. हो जाता है, तो अवमूल्यन की दर ज्ञात कीजिए।

7. किसी परियोजना को चार वर्षों में पूरा करने के लिए एक कंपनी ने 8000 श्रमिकों को नियुक्त किया। प्रथम वर्ष के अंत में 5% श्रमिकों को कार्यमुक्त किया गया। दूसरे वर्ष के अंत में, उस समय कार्यरत श्रमिकों में से 5% को कार्यमुक्त किया गया। किन्तु परियोजना को समय पर पूर्ण करने हेतु तीसरे वर्ष की समाप्ति पर उस समय कार्यरत श्रमिकों की संख्या में 10% की वृद्धि की गई। चौथे वर्ष की अवधि में कितने श्रमिक कार्यरत थे?

8. एक शहर की जनसंख्या प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में जितनी है, उसमें प्रत्येक वर्ष 4% वृद्धि हो जाती है। यदि 1997 में जनसंख्या 6760000 थी, शहर की जनसंख्या (i) 1999 और (ii) 1995 में ज्ञात कीजिए।

9. एक धर्मार्थ चिकित्सालय में 24000 रक्तदाता पंजीयत थे। प्रत्येक छ: माह में रक्तदाताओं की संख्या में 5% की वृद्धि हुई। ज्ञात कीजिए कि कितनी समयावधि के पश्चात् रक्तदाताओं की कुल संख्या 27783 हो जाएगी।

10. जितेंद्र ने 2500000 रु. की लागत से एक कारखाना स्थापित किया। प्रथम दो क्रमानुसार वर्षों में उसे क्रमश: 5% और 10% लाभ हुआ। यदि प्रत्येक वर्ष लाभ पिछले वर्ष की पूंजी पर हुआ हो, तो उसके कुल लाभ की गणना कीजिए।

11. एक कारखाने ने वर्ष 1996 में तिपहियों के उत्पादन को 80000 से बढ़ाकर 1999 में 92610 कर दिया। तिपहियों के उत्पादन की वृद्धि की वार्षिक दर ज्ञात कीजिए।

12. दिया है कि कार्बन-14 (C_{14}) का एक स्थिर दर से इस प्रकार ह्रास होता है कि 5568 वर्षों में वह 50% ही शेष बचता है। एक प्राचीन काष्ठ के टुकड़े की वय ज्ञात कीजिए जिसमें मूल का केवल 12.5% कार्बन शेष है।

   [संकेत : यदि ह्रास होने की दर R% है और काष्ठ के टुकड़े की वय n वर्ष हो,

   तो $\left(1-\frac{R}{100}\right)^{5568}=\frac{50}{100}$ और $\left(1-\frac{R}{100}\right)^{n}=\frac{12.5}{100}$],

13. 500000 रु. मूल्य वाले एक फ्लैट का 10% प्रतिवर्ष की दर से अवमूल्यन हो रहा है। कितने वर्षों में उसका मूल्य घट कर 364500 रु. हो जाएगा?

14. आशीष ने 500000 रु. की मूल पूंजी से व्यापार प्रारंभ किया। प्रथम वर्ष में उसे 4% कि हानि हुई। जबकि दूसरे वर्ष में उसे 5% का लाभ हुआ जो कि बढ़कर तीसरे वर्ष में 10% हो गया। परिकलन कीजिए कि पूरे तीन वर्षों की अवधि में उसे कितना शुद्ध लाभ हुआ।

अध्याय 7

बैंक प्रणाली

7.1 भूमिका

यह विश्वास किया जाता है कि आदि मानव उतना ही शिकार करता था या उतनी ही उपज करता था जो उसकी एक या दो दिन की आवश्यकता की पूर्ति करती हो। बाद में सभ्यता के विकास के साथ-साथ उसने पूरे ऋतु काल या वर्ष का उत्पादन करना प्रारंभ कर दिया और इस के साथ ही भविष्य के लिए जमा करना प्रारंभ किया। उस काल में, मुद्रा के वर्तमान स्वरूप का अस्तित्व नहीं था और मनुष्य वस्तुओं या सेवाओं की प्राप्ति के लिए बदले में अन्य वस्तुएँ या सेवाएँ प्रदान करता था। यह प्रणाली, जिसे वस्तु-विनिमय कहते हैं, कई प्रकार से कठिन और असुविधाजनक थी। किन्तु मनुष्य विशिष्ट वस्तुएँ (जैसे गेंहू, गाय, ऊँट आदि) उधार देते थे या उध ार लेते थे जो उन्हें उसी रूप में या कोई दूसरे परस्पर स्वीकृत रूप में वापिस मिलता था। इस असुविधा और दूसरी परेशानियों से मुक्ति पाने के लिए परस्पर विनिमय के व्यापार से उनका ध्यान मुद्रा बचत की ओर गया और लोगों ने अपनी भविष्य की आवश्यकता के लिए धन बचाना प्रारंभ कर दिया। इस के साथ ही धन को किसी सुरक्षित स्थान में रखने की आवश्यकता हुई। प्रारंभ में उस काल के धनी व्यक्ति जो विश्वास योग्य थे और जिनके पास अपनी तथा और अपने धन की सुरक्षा के साधन थे साधारण व्यक्तियों की बचत सुरक्षित रखते थे और इस कार्य के लिए धन लेते थे। समयानुसार उन्होंने देखा कि सुरक्षित रखे धन, जो उनके पास धरोहर के रूप में आता था, का कुछ भाग दूसरे को उधार देने के काम आ सकता था, क्योंकि सभी व्यक्ति की एक ही समय धन वापिस लेने आने की कोई सम्भावना नहीं थी। इस प्रकार धरोहर रखी राशि ऋण देने के काम आने लगी। ये साहूकार अब अपना धरोहर रखने वाले व्यक्तियों को कुछ राशि ब्याज के रूप में देने लगे और ऋण लेने वालों से कुछ राशि ऊँचे दर पर ब्याज स्वरूप लेने लगे। इस प्रकार दूसरों की

धरोहर राशि से लाभ प्राप्त करने लगे। अंत में इस प्रकार बैंक रूपी संस्था का उदय हुआ। समय के साथ यह बैंक रूपी संस्था अपने को परिष्कृत करती गई और वर्तमान रूप में आ गई जो आजकल हमारे सामने है।

वर्तमान में बैंक वह संस्था है जिसमें वे लोग जिन के पास कुछ बचत राशि है, अपना धन धरोहर रूप में जमा रखते हैं और वे लोग जिन्हें धन की आवश्यकता होती है कुछ शर्तो पर जिसमें धन की वापिसी सुरक्षित हो और ब्याज देने की सहमति देकर धन ऋण रूप में ले सकते हैं। बैंक से उधार लिए जाने वाले धन पर ब्याज की दर, जमाकर्ता को दिए जाने वाली ब्याज की दर से सदैव अधिक होती है। जमाकर्ता का धन सुरक्षित रखने और ऋण लेने वालों को धन उधार देने के अतिरिक्त बैंक जनता को बहुत प्रकार के वित्तीय प्रबन्धों में सहायता करता है। संक्षेप में बैंक के प्रमुख कार्य हैं :

1. जमाकर्ताओं से धन प्राप्त करना।
2. आवश्यकता पड़ने पर धन उधार देना।
3. एक स्थान से दूसरे स्थान को धन का स्थानान्तरण करना।
4. जन सुविधाओं जैसे टेलीफोन, बिजली, पानी के बिल, मकान कर आदि के भुगतान की राशि प्राप्त करना।
5. मूल्यवान वस्तुओं को सुरक्षित रखने के लिए सुरक्षित जमा लाकर्स को किराये पर देना।
6. यात्री चैक और विदेशी मुद्रा देकर यात्रियों और टूरिस्टों की सहायता करना।

बैंक में हम भिन्न प्रकार के खाते खोल सकते हैं जैसे

1. बचत बैंक खाता
2. चालू खाता
3. सावधि जमा खाता
4. आवर्ती जमा खाता

हम इन खातों को एक के बाद एक लेंगे और उन के संबंध में अधिक जानने का प्रयत्न करेंगे।

(1) बचत बैंक खाता

बैंक के द्वारा प्रदत्त योजनाओं में से सबसे अधिक लोकप्रिय बचत खाता है। इस में, कोई भी व्यक्ति दो सौ रुपयों की छोटी सी रकम से बैंक में खाता खोल सकता है। खाता खोलने के पश्चात् खाताधारी अपने खाते में सतत् धन जमा कर सकता है। आवश्यकता पड़ने पर वह अपने खाते में से धन निकाल भी सकता है, इसके लिए वह आहरण पर्ची (प्रतिरूप आकृति 7.1) भरे या चैक (प्रतिरूप आकृति 7.2 में) भरे। खाताधारी को एक चैक बुक दी जाती है जो इस शर्त पर होती है कि बैंक के नियमानुसार खाते में न्यूनतम राशि हमेशा जमा रहेगी। वर्तमान में यह न्यूनतम राशि 550 रु. है।

C.S.D.F.B.D. 9843/2000/20000 Pads/YPP
Item Code No. 5001026
अपरक्राम्य/Not Negotiable
C O S 161 R

भारतीय स्टेट बैंक
STATE BANK OF INDIA
..............................शाखा/BRANCH

खाता धारक का (के) नाम:
Name of the Account Holder (s)

बचत खाते से पैसा निकालने का फॉर्म
SAVINGS BANK WITHDRAWAL FORM

तारीख/
DATE__________20___

सावधानी : यह बचत बैंक निकासी आदेश फार्म चेक नहीं है। इस फार्म के साथ पास-बुक रहना अनिवार्य है, अन्यथा भुगतान प्राप्त नहीं होगा।
Care : This form is not a cheque Payment will be refused if the pass-book is not produced with this form.

बही क्रमांक/
Ledger No.

खाता क्रमांक/
Account Number

आद्याक्षर
Initials

कृपया केवल मुझे/हमें अदा करें/PLEASE PAY SELF/OURSELVES ONLY

रुपये / RUPEES

तथा राशि को मेरे / हमारे उपर्युक्त खाते में नामे करें
AND DEBIT THE AMOUNT TO MY/OUR ABOVE SAVINGS BANK ACCOUNT

रु.
Rs.

लेजर/खाता क्रमांक
Ledger Account No.

टोकन क्र.
Token No.

रोकड़ अदा करें/ Pay Cash

स्क्रॉल क्र.
Scroll No.

पासकर्ता अधिकारी
Passing Officer

खाताधारक का (के) हस्ताक्षर
Signature(s) of the Account Holder(s)

आकृति 7.1

दिनांक/DATE

PAY

या धारक को OR BEARER

रुपये RUPEES

अदा करें रु.Rs.

खा. सं. A/c. No.
ब.पृ. LF
ह.सं. INTLS

भारतीय स्टेट बैंक
STATE BANK OF INDIA
एन सी ई आर टी नई दिल्ली - 110 016
N C E R T. NEW DELHI - 110 016.
MSBL/221

⑈552421⑈ 110002078⑆ 10

आकृति 7.2

प्रत्येक खाताधारी को बैंक द्वारा एक 'पास बुक' (खाता पुस्तिका) दी जाती है जिस में प्रत्येक तिथि के अनुसार उस के द्वारा जमा की गई अथवा निकाली गई राशि और बैंक द्वारा देय ब्याज का पूर्ण विवरण प्रविष्ट किया जाता है। बचत बैंक खाता की पास बुक सामान्य प्रारूप नीचे दिया जा रहा है :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि		जमा की गई राशि		शेष		आद्यक्षर
		रु.	पै.	रु.	पै.	रु.	पै.	

(विशिष्ट बैंकों के पास बुक प्रारूप में कुछ अंतर हो सकता है।)

इस खाते में ब्याज निम्न नियमों के अनुसार दिया जाता है :

(i) प्रत्येक महीने की दस तारीख से अंतिम तिथि तक जो न्यूनतम शेष राशि होती है, उस पर ब्याज देय होता है।

(ii) यद्यपि ब्याज की गणना माह के अनुसार होती हैं परंतु सामान्यत: खाते में उसकी प्रविष्टि प्रत्येक छ: माह में होती है। कुछ बैंकों में ब्याज का संयोजन प्रति वर्ष होता है। इस प्रकार भिन्न बैंकों में ब्याज के संयोजन की अवधि भिन्न हो सकती है।

बचत बैंक खाते के अंतर्गत् मिलने वाले ब्याज की वर्तमान दर 4% प्रति वर्ष है। यह बैंक विशेष पर निर्भर करता है कि ब्याज का संयोजन अर्ध-वार्षिक हो या वार्षिक। बचत बैंक खाता किसी डाकखाने में भी खोला जा सकता है।

(2) चालू खाता

यह खाता प्राय: व्यापारियों कंपनियों, शासकीय संस्थाओं आदि के द्वारा निर्वाह किया जाता है जिन्हें अपने कार्य के लिए प्रतिदिन बहुत से वित्तीय कार्य करना होते हैं। चालू खाते में कुछ ऐसी सुविधायें होती हैं जो बचत बैंक खाते में नहीं होतीं। उदाहरणार्थ इसमें निकालने या जमा करने की राशि आवृत्ति पर बंधन नहीं होता जब कि बचत बैंक खाते में ऐसे बंधन होते हैं। किन्तु, इस खाते में जमा धन राशि पर कोई ब्याज नहीं मिलता है। वास्तव में, कुछ प्रकरणों में बैंक खाता-धारक से आकस्मिक व्यय वसूल करते हैं।

(3) सावधि जमा खाता

इस योजना में राशि किसी निश्चित अवधि के लिए जमा की जाती है। समान्यत: इस में से राशि, निश्चित अवधि जो खाता खोलते समय दर्शाई जाती है, के पश्चात् ही निकाली जा सकती है। स्पष्टत: बैंक सावधि जमा खाते में रखी राशि का उपयोग बचत बैंक खाते की अपेक्षा और स्वतंत्रता से कर सकता है। इसलिए बैंक इस प्रकार जमा राशि पर अधिक ब्याज देता है। ब्याज दर उस अवधि पर निर्भर करती है जिसके लिए राशि जमा की गई है। भिन्न बैंकों में ब्याज की दर प्रतिवर्ष में भिन्न हो सकती है। भारतीय स्टेट बैंक में सावधि जमा में 10 सितंबर 2001 से प्रभावी ब्याज दर प्रति वर्ष निम्नानुसार हैं :

समयावधि	ब्याज की दर (प्रतिशत में)
15 दिन और 45 दिनों तक	5.25
46 दिन और 179 दिनों तक	6.50
180 दिनों से 1 वर्ष से कम तक	6.75
1 वर्ष से 2 वर्षों से कम तक	8.00
2 वर्ष से 3 वर्षों से कम तक	8.00
3 वर्ष से और उससे अधिक	8.50

(4) आवर्ती जमा

जैसा कि इसके नाम से संकेत मिलता है, इस खाते में जमाकर्ता उसके द्वारा प्रारंभ में चुनी गई निश्चित अवधि तक उसके द्वारा चुनी गई निश्चित राशि (सामान्य 5 रु. या 10 रु. का गुणज) प्रतिमाह जमा करता है। यह निश्चित समय 6 माह से 10 वर्ष तक होता है। इस खाते में ब्याज की दर लगभग सावधि जमा खाते की दर के समान होती है। ऐसे खातों में, जमाकर्ता को थोक रकम (जिसे परिपक्वता मूल्य कहते हैं) का भुगतान निश्चित अवधि (जिसे परिपक्वता अवधि कहते हैं) की समाप्ति पर किया जाता है। सामान्यत: बैंक ऐसी तालिकाएँ छापते हैं जिनमें यह अंकित रहता है कि कितने रुपये कितने महीने तक जमा करने पर अंत में कितना परिपक्वता मूल्य मिलेगा। ब्याज की दर बदल जाने के कारण समय समय पर इन तालिकाओं को

संशोधित किया जाता है।

टिप्पणी : इस अध्याय में, हम बचत बैंक खाता और सावधि जमा खातों के ब्याज के परिकलन की व्याख्या तक ही सीमित रहेंगे।

7.2 बचत बैंक खाते के ब्याज का परिकलन

हम कुछ उदाहरणों के द्वारा बचत बैंक खाते के ब्याज के परिकलन की विधि को प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 1 : नरेश 2.4.93 को बैंक में 500 रु. से बचत बैंक खाता खोलता है। उसने 9.4.93 को 50 रु. जमा किया और उसके बाद उसने अप्रैल 1993 में न तो कुछ जमा किया और न ही कुछ निकाला। अप्रैल 1993 के माह में उसे किस राशि पर ब्याज मिलेगा।

हल : महीने की 10 तारीख से अंतिम तिथि तक जो न्यूनतम शेष राशि होती है, उस पर ब्याज देय होता है।

अत: राशि जिस पर उसे ब्याज मिलेगा, है 500 रु. + 50 रु. = 550 रु.

उदाहरण 2 : नमिता का बचत बैंक खाता सैंट्रल बैंक आफ इन्डिया के पास है। उसकी पास बुक में फरवरी 1993 माह की प्रविष्टयाँ इस प्रकार हैं :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.
28 जनवरी 93	पिछले पृष्ठ से			1100.00
1 फरवरी 93	नगद		100.00	1200.00
7 फरवरी 93	चैक द्वारा		250.00	1450.00
24 फरवरी 93	चैक द्वारा		200.00	1650.00

फरवरी 1993 के माह में उसे किस राशि पर ब्याज मिलेगा?

हल : यहाँ, यद्यपि 24 फरवरी को शेष राशि 1650 रु. है, लेकिन फरवरी के 10वें दिन और अंतिम दिन के बीच न्यूनतम शेष राशि 1450 रु. है इसलिए फरवरी 1993 के माह के लिए नमिता को 1450 रु. की राशि पर ब्याज देय होगा।

उदाहरण 3 : श्रीमती अमिता की बचत बैंक खाता की पास बुक का एक पृष्ठ निम्न लिखित है :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.
1 जनवरी 93	पिछले पृष्ठ से			2630.50
20 फरवरी	नगद		1050.00	3680.50
25 फरवरी	स्वयं	200.00		3480.50
14 मई	नगद		2000.00	5480.50
7 जून	नगद		1700.00	7180.50
21 जून	चैक क्रमांक 312	5102.00		2078.50

यह मानते हुए कि ब्याज का संयोजन प्रतिवर्ष जून और दिसंबर के अन्त में 5% प्रति वर्ष की दर होता है, जून 1993 के अंत में पास बुक के ब्याज का परिकलन कीजिए।

हल : जनवरी के माह में न्यूनतम शेष राशि = 2630.50 रु.

फरवरी के माह में न्यूनतम शेष राशि = 2630.50 रु.

मार्च के माह में न्यूनतम शेष राशि = 3480.50 रु.

अप्रैल के माह में न्यूनतम शेष राशि = 3480.50 रु.

मई के माह में न्यूनतम शेष राशि = 3480.50 रु.

जून के माह में न्यूनतम शेष राशि = 2078.50 रु.

योग = 17781.00 रु.

अब ब्याज के परिकलन के लिए एक माह का मूलधन = 17781 रु. मान लेते हैं।

इसलिए, ब्याज $= 17781 \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{12}$ (1 माह $= \frac{1}{12}$ वर्ष)

$= 74.09$ रु. (निकटतम)

अतः ब्याज की प्रविष्टि 74.09 रु. है।

उदाहरण 4 : किसी खाताधारी के बचत बैंक खाते की पास बुक में निम्न प्रविष्टियाँ हैं :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.
1 जनवरी 98	नगद		600.00	600.00
8 जनवरी	स्वयं	100.00		500.00
10 जनवरी	चैक द्वारा		300.00	800.00
29 जनवरी	स्वयं निकाला	50.00		750.00
1 फरवरी	वेतन द्वारा		2450.00	3200.00
5 फरवरी	चैक क्रमांक 825	700.00		2500.00
15 फरवरी	चैक क्रमांक 826	500.00		2000.00
28 फरवरी	चैक क्रमांक 827	150.00		1850.00
1 मार्च	वेतन द्वारा		2450.00	4300.00
6 मार्च	स्वयं	1750.00		2550.00
18 मार्च	चैक द्वारा		100.00	2650.00
21 मार्च	चैक क्रमांक 828	1200.00		1450.00

यदि ब्याज की दर 4.5 प्रतिशत प्रति वर्ष हो और ब्याज का संयोजन प्रत्येक वर्ष मार्च और सितम्बर के अंत में होता हो तो खाताधारी के उपर्युक्त खाते में मार्च 1998 के अंत में अर्जित ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : जनवरी 1998 में न्यूनतम शेष राशि = 750.00 रु.

फरवरी 1998 में न्यूनतम शेष राशि = 1850.00 रु.

मार्च 1998 में न्यूनतम शेष राशि = 1450.00 रु.

योग = 4050.00 रु.

अब ब्याज के परिकलन के लिए 4050 रु. को एक माह का मूलधन मान लेते हैं।

अतः ब्याज $= \frac{4050 \times 4.5 \times 1}{100 \times 12}$ रु.

$= 15.19$ रु. (लगभग)

अतः 15 मार्च 1998 के अंत में अर्जित ब्याज 15.19 रु. है।

उदाहरण 5 : निशा के नाम से बचत बैंक खाता है। वर्ष 2000 में उसकी पास बुक में निम्न प्रविष्टियाँ हैं:

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.
1 जनवरी 2000	पुराना शेष			2300.00
8 जनवरी	नगद		600.00	2900.00
6 फरवरी	चैक क्र. 313 से	300.00		2600.00
18 फरवरी	चैक से		800.00	3400.00
3 मार्च	चैक क्र. 314 से	500.00		2900.00
21 मई	नगद		800.00	3700.00
9 जून	नगद		300.00	4000.00
4 जुलाई	चैक क्र. 315 से	300.00		3700.00
11 अगस्त	नगद		500.00	4200.00
8 सितम्बर	नगद		400.00	4600.00
16 नवम्बर	चैक क्र. 316 से	800.00		3800.00
5 दिसम्बर	नगद		500.00	4300.00
23 दिसम्बर	चैक क्र. 317 से	200.00		4100.00

यह मानते हुए कि ब्याज का संयोजन वर्ष में एक बार दिसम्बर के अन्त में 5% प्रति वर्ष की दर से होता है। उपरोक्त वर्ष में निशा के द्वारा अर्जित ब्याज का परिकलन कीजिए।

हल : भिन्न महीनों के 10वें दिन और अंतिम दिन के बीच में न्यूनतम शेष राशि निम्नानुसार है :

जनवरी	2900.00 रु.
फरवरी	2600.00 रु.
मार्च	2900.00 रु.
अप्रैल	2900.00 रु.
मई	2900.00 रु.
जून	4000.00 रु.
जुलाई	3700.00 रु.
अगस्त	3700.00 रु.
सितम्बर	4600.00 रु.
अक्तूबर	4600.00 रु.
नवम्बर	3800.00 रु.
दिसम्बर	4100.00 रु.
योग	42700.00 रु.

अत: ब्याज $= 42700 \times \frac{5}{100} \times \frac{1}{12}$

$= 177.92$

इस प्रकार, दिसम्बर के अन्त में अर्जित ब्याज 177.92 रु. है।

उदाहरण 6 : जॉन का बैंक में बचत बैंक खाता है उस की पासबुक में निम्न प्रविष्टियाँ हैं :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.
19 फरवरी 2001	नगद		1000.00	1000.00
25 फरवरी	नगद		2000.00	3000.00
1 मार्च	वेतन से		5000.00	8000.00
10 मार्च	चैक क्र. 312 से	2000.00		6000.00
27 मार्च	चैक क्र. 313 से	500.00		5500.00
1 अप्रैल	वेतन से		5000.00	10500.00

उसने 11 अप्रैल 2001 को खाता बंद कर दिया। 4% प्रति वर्ष की दर से ब्याज का परिकलन कीजिए।

हल : फरवरी माह के लिए न्यूनतम शेष राशि 0 रु. है। मार्च माह के लिए न्यूनतम शेष राशि 5500 रु. है। योग 5500 रु. है।

अब 5500 रु. को एक माह का मूलधन मानकर ब्याज की गणना करते हैं

$$\text{ब्याज} = 5500 \times \frac{4}{100} \times \frac{1}{12}$$

$$= 55/3 \text{ रु.} = 18.33 \text{ रु. (निकटतम)}$$

अत: जॉन को जमा राशि पर 18.33 रु. ब्याज प्राप्त होगा।

प्रश्नावली 7.1

1. नरेश ने 07.01.2000 को 6000 रु. से बचत बैंक खाता खोला। उस के बैंक से लेन देन का विवरण इस प्रकार था :

   उस ने 11.01.2000 को 120.00 रु. जमा किये, 20.01.2000 को 80.00 रु. निकाले और 50.00 रु. 31.01.2000 को निकाले। 10.02.2000 को उसने 1050.00 रु. और 20.02.2000 को 50 रु. जमा किए। मार्च 2000 को उसने कोई लेन देन नहीं किया।

जनवरी, फरवरी और मार्च 2000 में ब्याज पाने की दशा सन्तुष्ट करने वाली राशि को अलग-अलग ज्ञात कीजिए।

2. कविता के बचत बैंक खाते में निम्न प्रविष्टियाँ हैं :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
2.6.99	नगद		800.00	800.00	
8.6.99	नगद		400.00	1200.00	
1.7.99	वेतन से		2000.00	3200.00	
5.7.99	चैक क्र. 2507	1600.00		1600.00	
22.7.99	नगद		1000.00	2600.00	

जून व जुलाई में वह किन राशियों पर ब्याज अर्जित करेगी, पृथक-पृथक गणना कीजिए।

3. विक्की की पासबुक का एक पृष्ठ निम्नानुसार है :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै	जमा की गई राशि रु. पै	शेष रु. पै	आद्यक्षर
1.4.93	पुराना शेष			6000.00	
22.4.93	चैक से		1600.00	7600.00	
24.5.93	नगद		2400.00	10000.00	
8.6.93	चैक क्र. 0214	2600.00		7400.00	
22.7.93	चैक क्र. 0215	1400.00		6000.00	
17.9.93	नगद		900.00	6900.00	
23.10.93	चैक से		1900.00	8800.00	
8.12.93	नगद		100.00	8900.00	

5% प्रति वर्ष ब्याज की दर से अप्रैल 1993 से दिसंबर 1993 की अवधि में अर्जित ब्याज ज्ञात कीजिए।

4. अलका की पासबुक का एक पृष्ठ निम्नानुसार है :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
1.10.93	पुराना शेष			5000.00	
7.11.94	वेतन से		8000.00	13000.00	
8.12.94	वेतन से		8000.00	21000.00	
18.12.94	चैक क्र. 0717 से	9000.00		12000.00	
22.1.95	वेतन से		8000.00	20000.00	
13.2.95	वेतन से		8000.00	28000.00	
22.2.95	चैक क्र. 0718 से	19000.00		9000.00	
5.3.95	वेतन से		8000.00	17000.00	
4.4.95	वेतन से		8000.00	25000.00	
14.4.95	नगद		2000.00	27000.00	
27.5.95	वेतन से		8000.00	35000.00	
12.6.95	वेतन से		8000.00	43000.00	

अलका, अन्तिम रूप से 22.06.1995 को खाता बंद करती है। ज्ञात कीजिए कि अक्तूबर 1994 से खाता बंद होने के दिन तक 4.5% प्रति वर्ष से उसे कितना ब्याज प्राप्त होगा?

5. नन्हे लाल की पासबुक का एक पृष्ठ निम्नलिखित है :

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
7.4.2000	नगद		250.00	250.00	
7.5.2000	नगद		150.00	400.00	
22.6.2000	नगद		275.00	675.00	
9.7.2000	नगद		335.00	1010.00	
29.7.2000	स्वयं	25.00		985.00	
2.8.2000	नगद		140.00	1125.00	
22.8.2000	स्वयं	110.00		1015.00	
3.9.2000	नगद		255.00	1270.00	
23.9.2000	स्वयं	420.00		850.00	

वह 01.10.2000 को खाता बंद कर देता है। यदि ब्याज का परिकलन 4% प्रति वर्ष की दर से किया जाए, तब ज्ञात कीजिए कि 01.10.2000 को उसे कुल कितनी राशि प्राप्त होगी?

6. नेहा की पासबुक का एक पृष्ठ निम्नलिखित है। पास बुक के इस पृष्ठ से कुछ प्रविष्टियाँ लुप्त हो गई हैं। प्रविष्टियों को पूर्ण कीजिए और नेहा के बचत खाते में शेष राशि दर्शाते हुए पृष्ठ को फिर से लिखिए।

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
3.7.2000	नगद		300.00	300.00	
4.8.2000	नगद		500.00	800.00	
5.9.2000	नगद		200.00	1000.00	
4.10.2000	स्वयं	200.00		800.00	
9.10.2000	नगद		लुप्त प्रविष्टि	1200.00	
4.11.2000	नगद		800.00	2000.00	
22.11.2000	स्वयं	लुप्त प्रविष्टि		1600.00	
1.12.2000	स्वयं	लुप्त प्रविष्टि		1500.00	
10.12.2000	नगद		लुप्त प्रविष्टि	2000.00	

7. बीना के बचत खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
1.1.2000	पिछला शेष			2800.00	
8.1.2000	नगद		2200.00	5000.00	
18.2.2000	चैक से	2700.00		2300.00	
19.5.2000	नगद		1800.00	4100.00	

30.06.2000 तक उस के द्वारा अर्जित ब्याज का परिकलन कीजिए, यदि ब्याज की दर निम्नानुसार समय के साथ परिवर्तित होती हो

(i) 01.10.1994 से 31.03.2000 तक 4.5% प्रति वर्ष

(ii) 01.04.2000 से आज तक 4% प्रति वर्ष

8. जोगिन्दर के बचत बैंक खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है।

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
01.07.1994	नगद		500.00	500.00	
04.08.1994	नगद		1000.00	1500.00	
31.08.1994	स्वयं	400.00		1100.00	
10.09.1994	नगद		900.00	2000.00	
04.10.1994	नगद		500.00	2500.00	
09.11.1994	नगद		600.00	3100.00	
04.12.1994	नगद		1100.00	4200.00	
28.12.1994	स्वयं	200.00		4000.00	

31.12.1994 तक उस के द्वारा अर्जित ब्याज का परिकलन कीजिए यदि ब्याज की दर निम्नानुसार समय के साथ परिवर्तित होती हो

(i) 30.09.1994 तक 5% प्रति वर्ष

(ii) 1.10.1994 से 31.03.2000 तक 4.5% प्रति वर्ष

9. ऋचा के बचत बैंक खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
5.1.1994	नगद		1200.00	1200.00	
9.1.1994	नगद		800.00	2000.00	
3.7.1994	चैक से		1945.00	3945.00	
14.7.1994	चैक क्र. 1605	945.00		3000.00	

5% प्रति वर्ष का दर से 31 जुलाई 1994 तक अर्जित ब्याज की गणना कीजिए।

10. डेनियल के बैंक खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
1.1.1997	पिछला शेष			2200.00	
10.1.1997	नगद		1400.00	3600.00	
5.2.1997	स्वयं	700.00		2900.00	
25.4.1997	चैक क्र. 1706	2100.00		800.00	
2.5.1997	सभाशोधन से		6500.00	7300.00	
17.5.1997	नगद		3000.00	10300.00	

यदि ब्याज की दर 4.5% प्रति वर्ष है, जिसका संयोजन प्रतिवर्ष जून और दिसंबर के अंत में होता है, तो पास बुक में जून 1997 के अंत में ब्याज की प्रविष्टि क्या होगी?

11. गुरमीत के बचत बैंक खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै	जमा की गई राशि रु. पै	शेष रु. पै	आद्यक्षर
1.4.1998	पिछला शेष			1400.00	
10.5.1998	नगद		700.00	2100.00	
2.6.1998	स्वयं	1000.00		1100.00	
11.7.1998	स्वयं	300.00		800.00	
21.8.1998	नगद		1700.00	2500.00	
3.10.1998	नगद		2400.00	4900.00	

यदि ब्याज की दर 4.5% प्रति वर्ष है, जिस का संयोजन प्रतिवर्ष दिसंबर के अंत में होता है, तो पासबुक में दिसंबर 1998 के अंत में ब्याज की प्रविष्टि क्या होगी?

12. अरुण के बचत बैंक खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्याक्षर
1.1.1993	पिछला शेष			3400.00	
8.1.1993	नगद		2100.00	5500.00	
18.2.1993	चैक क्र. 217	3500.00		2000.00	
19.5.1993	नगद		1600.00	3600.00	
15.7.1993	नगद	500.00		3100.00	
7.10.1993	नगद		1100.00	4200.00	

30.10.1993 को उसने खाता बंद कर दिया। यदि ब्याज की दर 5% प्रति वर्ष थी, तो ज्ञात कीजिए कि खाता बंद करने पर उसे कितना ब्याज मिला?

13. संगीता के बचत बैंक खाते का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै	जमा की गई राशि रु. पै	शेष रु. पै	आद्याक्षर
1.4.2000	पिछला शेष			700.00	
3.5.2000	नगद		1000.00	1700.00	
11.5.2000	चैक क्र. 587	200.00		1500.00	
1.7.2000	चैक से		1500.00	3000.00	
2.7.2000	नगद		500.00	3500.00	
4.8.2000	चैक क्र. 588	200.00		3300.00	

ब्याज की दर 4% प्रति वर्ष है, जिसका संयोजन प्रतिवर्ष सितंबर के अंत में होता है। परिकलन कीजिए कि 01.10.2000 को उसको कितना ब्याज देय होगा और उस तिथि में शेष राशि क्या होगी?

14. मन्नू लाल की बचत बैंक खाता पासबुक का एक पृष्ठ निम्नलिखित है

तिथि	विवरण	निकाली गई राशि रु. पै.	जमा की गई राशि रु. पै.	शेष रु. पै.	आद्यक्षर
1.7.2000	नगद		1500.00	1500.00	
19.8.2000	चैक क्र. 319	100.00		1400.00	
24.9.2000	चैक क्र. 512 से		1500.00	2900.00	
29.10.2000	स्वयं	200.00		2700.00	
2.11.2000	नगद		1300.00	4000.00	

ब्याज की दर 4% प्रति वर्ष है, जिसका संयोजन प्रति वर्ष दिसम्बर के अंत में होता है। दिसम्बर 2000 के अंत में उसके खाते में ब्याज की गणना कीजिए।

7.3 सावधि जमा खाता में ब्याज का परिकलन

सावधि जमा खाते पर ब्याज के परिकलन की प्रक्रिया को हम निम्नलिखित उदाहरणों से प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 7 : विलियम बैंक में एक वर्ष के लिये 10000 सावधि जमा खाते मे जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8.5% प्रति वर्ष है जिसका संयोजन अर्ध-वार्षिक होता है, तो विलियम के सावधि राशि जमा का परिपक्वता मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = 10000 रु.

दर = 8.5% प्रति वर्ष = 4.25% अर्ध-वार्षिक

समय = 1 वर्ष = 2 अर्ध-वर्ष

मिश्रधन $= 10000\left(1+\frac{4.25}{100}\right)^2$

$= 10000 \times (1.0425)^2$

$= 10868.0625$ रु.

अतः विलियम को देय परिपक्वता मूल्य 10868 रु. है।

उदाहरण 8 : शशि बैंक में 73 दिनों के लिए 50000 रु. का सावधि जमा खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 6.5% प्रति वर्ष है, तो उस सावधि जमा राशि की परिविक्वता पर कितनी राशि प्राप्त होगी?

हल : यहाँ ब्याज $= \frac{PRT}{100}$

$$= \frac{50000 \times 65 \times 73}{100 \times 10 \times 365} \left[73 \text{ दिन} = \frac{73}{365} \text{ वर्ष} \right]$$

$= 650$ रु.

इसलिए, सावधि जमा की परिपक्वता पर शशि को 50650 रु. प्राप्त होंगे।

प्रश्नावली 7.2

1. हरभजन बैंक में 6 महीने के लिए 20000 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 7% प्रति वर्ष हो तथा ब्याज का संयोजन त्रैमासिक हो, तो परिपक्वता पर उसे कितनी राशि प्राप्त होगी?
2. निखिल बैंक में 1 वर्ष 6 माह के लिए 50000 सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8% प्रति वर्ष है, तथा उस का संयोजन अर्ध-वार्षिक हो, तो परिपक्वता पर मिलाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।
3. मूर्ति बैंक में 25 दिन के लिए 730 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 5.25% प्रति वर्ष है, तो परिपक्वता पर उसे कितनी राशि प्राप्त होगी?
4. फिलिप बैंक में 219 दिन के लिए 40700 रु. को सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 6.75% वार्षिक हो तो ज्ञात कीजिए कि परिपक्वता पर उसे कितना ब्याज मिलेगा।
5. अब्दुल बैंक में 2 वर्षों के लिए 20000 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक है, तथा उस संयोजन वार्षिक हो, तो परिपक्वता मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. गौतम बैंक में 4 वर्षों के लिए 60000 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक है, तथा उस का संयोजन वार्षिक हो, तो परिपक्वता मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. अनुराधा बैंक में 1 वर्ष के लिए 90000 रु. सावधि खाते में जमा करती है। यदि ब्याज की दर 8% प्रति वर्ष है, तो परिपक्वता मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. सुब्रामनयम बैंक में $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 20000 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8% प्रति वर्ष है, तथा उस का संयोजन अर्ध-वार्षिक हो, तो ज्ञात कीजिए की परिपक्वता पर उसे कितनी राशि प्राप्त होगी।

9. अनुपम बैंक में 3 वर्ष के लिए 10000 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8% प्रति वर्ष है, तो ज्ञात कीजिए की परिपक्वता के समय उसे कितनी राशि देय होगी?

10. सुभाष बैंक में $2\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 150000 रु. सावधि खाते में जमा करता है। यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक है, तथा उस का संयोजन वार्षिक हो, तो ज्ञात कीजिए कि परिपक्वता के समय उसे कितनी राशि प्राप्त होगी?

अध्याय 8

रेखाएँ, कोण और त्रिभुज

8.1 भूमिका

शब्द 'ज्यामिति' (geometry) यूनानी भाषा के दो शब्दों 'जियो' (geo) और 'मेट्रन' (metron) से बना है। 'जियो' का अर्थ है पृथ्वी और 'मेट्रन' का अर्थ है, 'मापना'। इस प्रकार ज्यामिति के उद्गम को मानव सभ्यता के विकास के उस काल से जोड़ा जा सकता है, जब मनुष्य को सर्वप्रथम अपने भूमि क्षेत्रों को नापने की आवश्यकता पड़ी थी। सम्भवत: मिस्र के निवासियों ने सर्वप्रथम ज्यामिति का अध्ययन किया था। उन की रुचि मुख्यत: क्षेत्रमिति की समस्याओं में थी, जैसे त्रिभुजों, आयतों आदि रेखीय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करना। इस के पश्चात् बेबीलोन निवासियों ने भी भिन्न-भिन्न रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या का अध्ययन किया और कुछ विशेष आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र निर्धारित किये। ये सूत्र बेबीलोन निवासियों के पुराने गणित शास्त्र 'रिण्ड पेपिरस' (Rhind Papyrus) (1650 ईसा पूर्व) में उपलब्ध हैं। मिस्र और बेबीलोन निवासियों, दोनों ने ही, ज्यामिति का अधिकांश उपयोग व्यवहारिक कार्यों के लिए ही किया परन्तु उस को एक क्रमबद्ध विज्ञान के रूप में विकसित करने के लिए बहुत कम काम किया।

हड़प्पा और मोहनजोदड़ो (दोनों अब पाकिस्तान में हैं) लोथल (गुजरात में) और कालीबंगन (राजस्थान में) में हुई खुदाइयों से ज्ञात होता है कि प्राचीन भारत में 2500 ईसा पूर्व से 1750 ईसा पूर्व की काल अवधि में, एक बड़े क्षेत्र में, विकसित सभ्यता फली-फूली। इस क्षेत्र का विस्तार उत्तर में पंजाब और उत्तर प्रदेश और दक्षिण में नर्मदा के मुहाने तक था। ये लोग, नगर की योजना बनाने, नावांगन बनाने, सड़कों और स्वच्छता संबंधी स्थलों को बनाने में निपुण और वास्तुकला में बहुत कुशल थे। इन स्थानों पर पाये गए, मिट्टी के बर्तनों पर ज्यामितीय आकृतियाँ, जैसे प्रतिच्छेदी वृत्त, अर्ध गोले आदि भित्तिचित्रों के सदृश्य खुदी हुई पाई गई हैं। इससे स्पष्ट होता है

कि उन्हें ज्यामिति का ज्ञान था, यद्यपि ऐसे कोई प्रमाण नहीं है जिन से हमें इस बात का पता लग सके कि उनका ज्यामितिय ज्ञान कितना था।

भारत में वैदिक काल में ज्यामिति का उद्‌गम वैदिक पूजा के लिए आवश्यक, भिन्न भिन्न प्रकार कि वेदियों और अग्नि-कुण्डों के निर्माण कार्य से हुआ। वेदी बनाने में आवश्यक मापन करने के लिए एक रस्सी, जिसे *सुल्व* कहते थे, का प्रयोग करते थे। 800 ईसा पूर्व से 500 ईसा पूर्व तक की रचित *सुल्व सूत्रों* (Sulba sutras) में वैदिक ऋषियों के ज्यामिति के ज्ञान के संबंध में बहुत अधिक सूचनाएँ हैं। बौद्धायन *सुल्व सूत्र* (लगभग 800 ईसा पूर्व) में, जो इन सभी ज्ञात सुल्व सूत्रों में सबसे पुराना है, तथाकथित पाइथागोरस प्रमेय का प्रकथन इस रूप में मिल जाता है कि 'किसी आयत का विकर्ण स्वयं दोनों (क्षेत्रफलों) को उत्पन्न करता है जो कि इस की दोनों भुजाओं के द्वारा उत्पन्न होते हैं। सुल्व-सूत्रों में उल्लेखित रचना-विधियों से पाइथागोरस प्रमेय की उपपत्ति मिल जाती है। सुल्व-सूत्रों में, भिन्न-भिन्न प्रकार की रैखिक आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र भी हैं।

भारत के ज्यामिति विदों में, हमें *ब्रह्मगुप्त* (जन्म 598 ई.) का, जिन्होंने चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी भुजाओं और अर्ध परिमाप के रूप में ज्ञात किया, *भास्कर* II (जन्म 1114 ई.) का, जिन्होंने पाइथागोरस प्रमेय की उपपत्ति विच्छेदन विधि द्वारा दी और *आर्यभट्ट* (जन्म 476 ई.) का, जिन्होंने समद्विबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का तथा पिरैमिड (Pyramid) के आयतन का परिकलन किया और π का निकटतम सन्निकट मान प्राप्त किया जिन्हें यहाँ उल्लेख कर देना आवश्यक है।

ज्यामिति का यह ज्ञान, मिस्र वासियों से यूनानियों तक पहुँचा। ऐसा जान पड़ता है कि 'मिलेटस' नामक एक नगर के व्यापारी *थेल्स* (640 ईसा पूर्व - 546 ईसा पूर्व) ने अपने यौवन काल में बहुत धन एकत्रित कर लिया था और उसके पश्चात् अपना समय पर्यटन और अध्ययन में व्यतीत किया। जब वह मिस्र की यात्रा पर था, तो उस में ज्यामिति के प्रति रुचि उत्पन्न हो गई। यूनान वापिस आने पर उसने अपने मित्रों को ज्यामिति सिखाई। *थेल्स* के शिष्यों में सबसे प्रसिद्ध शिष्य *पाइथागोरस* (580 ईसा पूर्व - 500 ईसा पूर्व) था।

यूक्लिड (लगभग 300 ईसा पूर्व) एक अन्य सुप्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ था। इसे ज्यामिति का पिता कहा जाता है। उसने ज्यामिति के अध्ययन में एक नई विचारधारा का शुभारंभ किया। यूक्लिड ने ज्यामिति के तथ्यों को निगमनिक तर्क (deductive

reasoning) द्वारा सिद्ध करने की विधि आरंभ की। इस विधि में कुछ स्पष्ट तथ्यों को, बिना प्रमाण के, *अभिगृहीत* (postulate) या *स्वयंसिद्ध* (axioms) मान लिया जाता है और फिर अन्य पूर्व प्रमाणित तथ्यों के आधार पर, प्रत्येक नए तथ्य को सिद्ध किया जाता है। यूक्लिड का ज्यामिति पर किया गया यह विशाल कार्य, *'एलीमेन्टस'* (Elements) नामक ग्रंथ के तेरह खंडों में समाहित है। यूक्लिड के *पाँचवें अभिगृहीत* का अपना ऐतिहासिक महत्व है। इस का कथन है *'यदि दो सरल रेखाओं पर एक सरल रेखा गिरती है, और इस प्रकार एक ही ओर बने अन्त: कोणों का योग दो समकोणों से कम है तब दोनों सरल रेखाएँ यदि अनिश्चित रूप से बढ़ाई जाती है, तो वे उस ओर मिलती हैं जिस ओर कोणों का योग दो समकोण से कम है।* तत्पश्चात् स्काटलैड के एक गणितज्ञ, *जान प्लेफेयर* ने 1729 में इस का पुनर्कथन किया जो कि *प्लेफेयर का अभिगृहीत* कहलाता है। इस अभिगृहीत को सिद्ध करने या उसे असत्य सिद्ध करने के प्रयत्नों से ही अयूक्लिडी ज्यामितियों का आविष्कार संभव हुआ है।

8.2 मूलभूत ज्यामितीय धारणाएं

पिछली कक्षाओं में हमने बिंदु (point), रेखा (line), तल (plane), एवं कुछ ज्यामितीय आकृतियों के संबंध में पढ़ा है। बिंदु, रेखा एवं तल वे तीन आधारभूत संकल्पनाएँ हैं जो कि गणितीय संरचना, जिसे *ज्यामिति* कहते हैं, के नींव के पत्थर हैं। हम बिंदु, रेखा एवं समतल को *अपरिभाषित पदों* के रूप में स्वीकार करेंगे। अत: ये अमूर्त रूप में हैं। फिर भी, इनका स्थूल भौतिक निरूपण हमें प्राप्त हो सकता है। कागज के एक पन्ने पर, बारीक पेंसिल द्वारा बनाया गया निशान, बिंदु से बहुत मिलता है। बिन्दुओं को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों जैसे A, B, C, D इत्यादि से दर्शाया जाता है। एक तनी हुई डोरी या कागज़ को मोड़ने से प्राप्त सरल क्रीज़ रेखा खंड (segment of a line) से बहुत निकट है। रेखा दोनों छोरों पर अनन्त तक चली गई है। इसे अंग्रेजी वर्णमाला के एक जोड़े बड़े अक्षरों से प्रकट करते हैं जैसे $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{CD}$ इत्यादि। रेखा को अंग्रेजी वर्णमाला के एक छोटे अक्षर जैसे l, m, p, q, इत्यादि से भी दर्शाते हैं। किसी चिकनी दीवार की सतह या मेज की ऊपरी सतह तल के एक भाग के निकट हैं। समतल सभी दिशाओं में अनन्त तक फैला है। तल को तीन असंरेख बिंदुओं के नामों, जैसे ABC का उपयोग करके दर्शाते हैं। तल को एक समांतर चतुर्भुज या आयत के शीर्षों के नामों, जैसे ABCD के द्वारा भी दर्शाया जाता है। इसे ग्रीक अक्षरों जैसे α, β, γ इत्यादि से भी प्रकट करते हैं।

पिछली कक्षाओं में आपने प्रयोगात्मक कार्य द्वारा कोणों, त्रिभुजों एवं तल की ज्यामितीय तथ्यों का अवलोकन किया है। आपने प्रयोगों द्वारा जो कुछ जाना है उनमें से कुछ तथ्यों का महत्व समझना वांछनीय है। सर्वप्रथम तो आप को यह बताना आवश्यक है कि आपको इन सभी तथ्यों की जानकारी क्यों होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, आप में से जो इंजीनियर, तकनीकज्ञ (technician) एवं वैज्ञानिक बनेंगे, वे अनुभव करेंगे कि उनके लिए यह सभी ज्ञान केवल उपयोगी ही नहीं अपितु कभी-कभी अपरिहार्य होगा। दूसरी बात समझने की यह है कि अभी तक आपने कुछ तथ्यों को केवल आकृति बनाकर और भुजाओं, कोणों आदि को मापकर ही रखा है। निश्चित ही, हम इस प्रकार सदैव आगे नहीं बढ़ सकते, क्योंकि नवीन परिणामों को सत्यापित करना तथा उन सब को याद रखना कठिन होगा। इस के विपरीत, हमारा कार्य सरल हो जाएगा, यदि केवल कुछ मूलभूत तथ्यों को सत्य मानकर, हम अन्य तथ्यों को उन से तर्कसंगत विवेचना (logical reasoning) द्वारा सिद्ध करना सीख लें। उन मूलभूत तथ्यों को, जिन्हें बिना प्रमाण सत्य मान लेते है, *'अभिगृहीत'* (axioms) कहते हैं। कई बार अभिगृहीत अंतर्ज्ञान द्वारा स्पष्ट होते हैं। एक गुणधर्म अथवा परिणाम को तभी सत्य मान लेंगे जब इन अभिगृहीतों पर आधारित तर्कसंगत विवेचन से हम उसका निगमन कर सकें। इस प्रक्रिया को 'गुणधर्मों या परिणामों का सिद्ध करना' कहते हैं और इस प्रकार सिद्ध किए गए परिणामों को *'प्रमेय'* कहते हैं। अब हम चाहते हैं कि कुछ प्रमेयों की औपचारिक उपपत्ति दी जाए, जिससे उपपत्तियों के भिन्न प्रकार जैसे कि *प्रत्यक्ष उपपत्ति, अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति, निश्शेषता* (exhaustion) *द्वारा उपपत्ति* को स्पष्टतः समझा जा सके। शेष परिणामों या प्रमेयों को बिना उपपत्ति के स्वीकार कर लेंगे (यद्यपि उनकी तर्कसंगत उपपत्ति दी जा सकती है)। किसी परिणाम की औपचारिक उपपत्ति में निम्न तथ्य समाहित होते हैं:

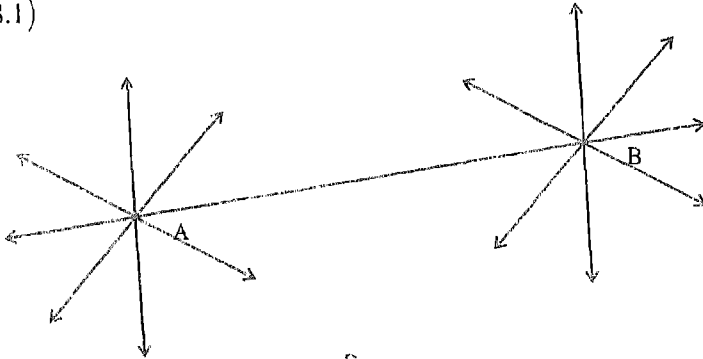
(i) *परिकल्पना* (hypothesis) *या दी हुई सूचनाएँ* (प्रतिबंध)

(ii) जिस परिणाम को सिद्ध करना है, उसका प्रकथन, सामान्यतः इसे *'सिद्ध करना है'* शीर्षक के अंतर्गत लिखा जाता है।

(iii) *रचना* (construction) यदि कोई हो, एवं

(iv) (प्रकथनों के पक्ष में) प्रकथनों और कारणों का चरणशः तर्कसंगत क्रम जब तक कि इच्छित परिणाम (जिसका उपरोक्त (ii) में उल्लेख है) प्राप्त न हो।

8.3 बिंदु एवं रेखाएँ

एक समतल में कोई भी दो भिन्न बिंदु A और B लें। यह सुगमता से सत्यापित किया जा सकता है कि समतल में अनन्त रेखाएँ खींची जा सकती हैं, जिनमें से प्रत्येक बिंदु A से होकर जाती है। इसी प्रकार यह सत्यापित किया जा सकता है कि समतल में अनंत रेखाएँ खींची जा सकती है, जिनमें से प्रत्येक बिंदु B से होकर जाती है। (आकृति 8.1)

आकृति 8.1

A से होकर जाने वाली कितनी रेखाएँ B से भी होकर जाती हैं? केवल एक अर्थात् रेखा AB है। B से होकर जाने वाली कितनी रेखाएँ A से भी होकर जाती हैं? केवल एक, अर्थात् रेखा AB है अतः हमने निम्न निष्कर्ष प्राप्त किया है:

गुणधर्म 8.1 : *यदि किसी तल में दो भिन्न बिंदु दिए हों, तो एक और केवल एक ही रेखा होती है जो दोनों बिंदुओं को आविष्ट करती है। विकल्पतः हम कह सकते हैं कि तल के दो भिन्न बिंदु एक अद्वितीय रेखा को निर्धारित करते हैं।*

ध्यान दीजिए कि केवल इस गुणधर्म के कारण हम रेखा का नाम $\overleftrightarrow{AB}$ (रेखा AB पढ़ें) रख सके हैं।

यदि हम समतल में तीन या उससे अधिक बिंदु लें, तो स्थिति क्या होगी?

केवल दो संभावनाएँ हो सकती हैं:

(1) सभी बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हैं या

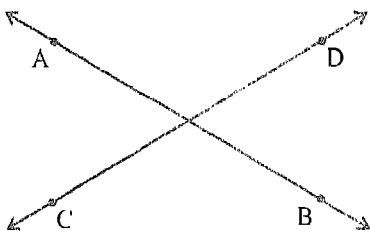
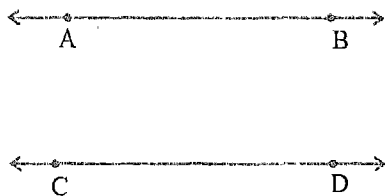
(2) सभी बिंदु एक ही रेखा पर स्थित नहीं हैं।

प्रथम स्थिति में बिंदुओं को *संरेख बिंदु* (collinear points) कहते हैं व द्वितीय स्थिति में बिंदुओं को *असंरेख बिंदु* (non-collinear points) कहते हैं।

यह स्पष्ट है कि संरेख या असंरेख बिंदुओं की चर्चा केवल तभी अर्थपूर्ण हो सकती है जबकि बिंदुओं की संख्या दो से अधिक हो।

अब हम एक तल में स्थित दो भिन्न रेखाओं AB और CD पर विचार करते हैं। इन रेखाओं के कितने उभयनिष्ठ बिंदु हो सकते हैं? हम देखते हैं कि इन रेखाओं का या तो

(i) एक उभयनिष्ठ बिंदु हो सकता है (आकृति 8.2(i)) या

(ii) कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ नही हो सकता है। (आकृति 8.2(ii))

आकृति 8.2

स्थिति (i) में रेखाओं को *प्रतिच्छेदी रेखाएँ* कहते हैं जबकि स्थिति (ii) में वे अप्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं। याद कीजिए कि एक तल की दो अप्रतिच्छेदी रेखाओं को *'समांतर रेखाएँ'* कहते हैं।

उपरोक्त के आधार पर हम निम्नलिखित परिणाम पर ध्यान दें:

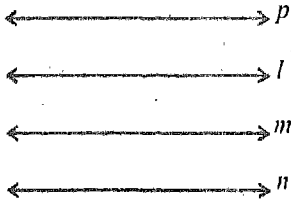
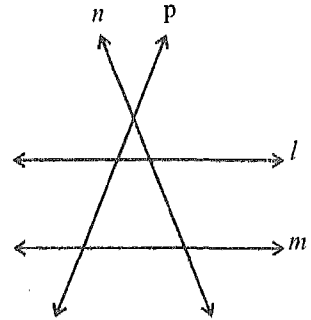
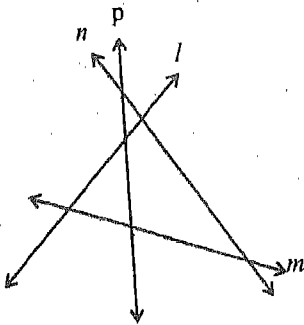
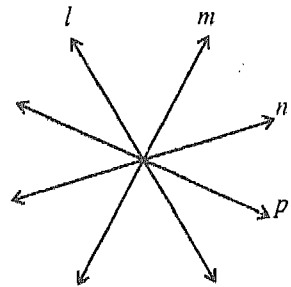
गुणधर्म 8.2 : *किसी तल में दो भिन्न रेखाओं के एक से अधिक उभयनिष्ठ बिंदु नहीं हो सकते।*

टिप्पणी : उपरोक्त परिणाम सुगमता से सिद्ध हो सकता है। दो रेखाओं के उभयनिष्ठ बिंदुओं के रूप में हम दो बिंदुओं, मान लो $X \neq Y$, पर विचार करें और तत्पश्चात् एक अंतर्विरोध प्राप्त करें।

अब हम एक प्रश्न करते हैं: मान लीजिए एक रेखा *l* और एक ऐसा बिंदु P दिया हुआ है जो रेखा *l* पर नहीं है, तो क्या ऐसी रेखा खींचना सम्भव है जो P से

होकर जाये और l के समांतर हो? यदि हाँ, तो ऐसी कितनी रेखाएँ खींच सकते हैं? अपने अनुभव से हम इसका उत्तर जानते हैं कि एक ऐसी रेखा है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है। यह भी कि केवल एक ही ऐसी रेखा है जो P से होकर जाती है और l के समांतर है। इस तथ्य को तर्कसंगत रूप से सिद्ध करना संभव नहीं है। फिर भी उचित रचना करके हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं:

गुणधर्म 8.3 : *यदि एक रेखा और एक बिंदु जो रेखा पर न दिए हों, तो एक और केवल एक ऐसी रेखा होती है जो दिए हुए बिंदु से होकर जाए एवं दी हुई रेखा के समांतर हो।*

इस कथन को स्काटलैंड के गणितज्ञ, जान प्लेफेयर, ने एक अन्य रूप में प्रस्तुत किया था, उसे प्लेफेयर अभिगृहीत (Playfair's Axiom) कहते हैं, जो इस प्रकार है:

आकृति 8.3

दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।

अब हम एक तल में दो से अधिक भिन्न रेखाओं के संबंध में सोचें। चार संभावनाएँ हो सकती हैं:

(1) कोई भी दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करती हैं। (आकृति 8.3(i))

(2) कुछ रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 8.3(ii))

(3) प्रत्येक रेखा युग्म प्रतिच्छेदी है किंतु भिन्न रेखायुग्मों के प्रतिच्छेद बिंदु भिन्न भिन्न हैं, अर्थात रेखाएँ एक ही बिंदु से होकर नहीं जातीं (आकृति 8.3(iii))

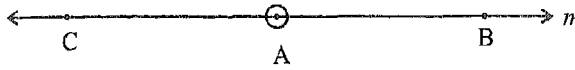
(4) प्रत्येक रेखा युग्म प्रतिच्छेदी है एवं सभी प्रतिच्छेद बिंदु संपाती होते हैं, अर्थात सभी रेखाएँ एक ही बिंदु से होकर जाती हैं। (आकृति 8.3(iv)) इस स्थिति में रेखाएँ *संगामी* (concurrent lines) कहलाती हैं।

यह ध्यान रहे कि संगामी या असंगामी (non- concurrent) रेखाओं की चर्चा केवल तभी अर्थपूर्ण हो सकती है जबकि रेखाओं की संख्या दो से अधिक हो।

8.4 रेखा का भाग

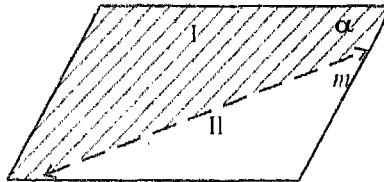
याद कीजिए कि रेखा के उस भाग को, जिस के दो अन्त बिंदु हैं, रेखाखण्ड कहते हैं, और रेखा के उस भाग को जिसका एक ही अन्त बिंदु है, *किरण* (ray) कहते हैं। रेखाखण्ड AB को $\overline{AB}$ से दर्शाते हैं एवं उसकी लंबाई को AB से दर्शाते हैं। किरण AB (अर्थात A से B की ओर) को $\overrightarrow{AB}$ से दर्शाते हैं एवं किरण BA (अर्थात B से A की ओर) को $\overrightarrow{BA}$ से दर्शाते हैं। फिर भी, इस पुस्तक में हम इन प्रतीकों का उपयोग नहीं करेंगे और रेखाखण्ड AB, किरण AB लंबाई AB व रेखा AB सभी को एक ही प्रतीक AB से दर्शायेंगे। संदर्भ से ही अर्थ स्पष्ट हो जाएगा। स्पष्टत: किरण BA के लिए हम प्रतीक BA का उपयोग करेंगे। रेखा m पर तीन बिंदुओं A, B एवं C पर, आकृति 8.4 के अनुसार विचार कीजिए।

आकृति 8.4

ध्यान दीजिए कि AB और AC *विपरीत किरणें* हैं। कल्पना कीजिए कि किरण AB और किरण AC से बिंदु A को हटा दिया गया। (आकृति 8.5) शेष भागों में से

आकृति 8.5

प्रत्येक को *अर्ध-रेखा* (half - line) कहते हैं। हम कहते हैं कि बिंदु A रेखा m को तीन भागों में विभाजित करता है, जिनके नाम हैं (1) *अर्ध-रेखा* AB, (2) *अर्ध-रेखा* AC और (3) *स्वयं बिन्दु* A। ध्यान दीजिए कि अर्ध-रेखा AB और किरण AB में केवल यह अंतर है कि बिंदु A क़िरण AB में समाहित होता है, परंतु यह अर्ध-रेखा AB में समाहित नहीं होता। बिंदु A के अपवर्जन को हम उसको एक वृत्त से घेरकर दर्शाते हैं।

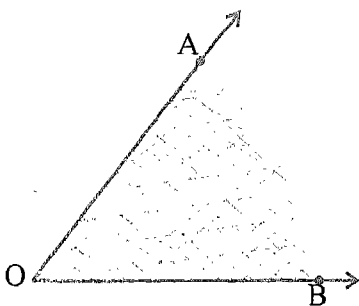
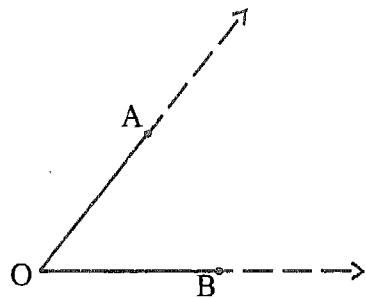
8.5 रेखा और तल

किसी तल α में हम रेखा m पर विचार करें। ध्यान दीजिए कि दिया हुआ तल तीन भागों I,II एवं रेखा m में विभाजित हो गया है। (आकृति 8.6) I और II में से प्रत्येक भाग को (जो कि m के विपरीत ओर स्थित हैं) एक *अर्ध-तल* (half-plane) कहते हैं। इस प्रकार रेखा तल को तीन भागों में बाँट देती है - दोनों अर्ध-तल एवं स्वयं रेखा m। रेखा m को बिन्दुंकित खींचा गया है जो यह प्रकट करता है कि रेखा m किसी भी अर्ध-समतल में आविष्ट नहीं है।

आकृति 8.6

8.6 बिंदु पर बने कोण

हमने पिछली कक्षाओं में कोणों के संबंध में पढ़ा है। याद कीजिए कि कोण वह आकृति है जो कि उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु वाली दो किरणों से निर्मित है। उभयनिष्ठ

प्रारंभिक बिंदु को *'शीर्ष'* एवं जिन किरणों से कोण निर्मित है, उन्हें *कोण की भुजाएँ* (arms) कहते हैं।

अतः आकृति 8.7(i) में, O शीर्ष है, तथा OA व OB को ∠AOB (या ∠BOA) की भुजाएँ कहते हैं। ध्यान दीजिए कि आकृति के बिन्दुंकित भाग को ∠AOB का अभ्यंतर (interior) कहते हैं। कोण एवं उसके अभ्यंतर को मिलाकर *कोणीय क्षेत्र* (angular region) बनता है। यह भी याद कीजिए कि यदि दो रेखाखण्ड OA और OB दिए हैं, जिनका एक उभयनिष्ठ अंत्य बिंदु O है, तब हम कहते हैं कि ये दो रेखाखण्ड एक कोण ∠AOB (या ∠BOA) को निर्धारित करते हैं (आकृति 8.7(ii))

आकृति 8.7

याद कीजिए कि 180^0 माप वाले कोण को *सरल कोण* (straight angle) तथा 90^0 माप वाले कोण को *समकोण* (right angle) कहते हैं। ऐसे कोण को, जिस का माप 0^0 से अधिक तथा 90^0 से कम हो, *न्यून कोण* कहते हैं। उस कोण को जिसका माप 90^0 से अधिक किन्तु 180^0 से कम हो, *अधिक कोण* कहते हैं। यदि दो कोणों के मापों का योगफल 180^0 हो तो उन्हें *सम्पूरक कोण* (supplementry angles) कहते है तथा यदि दो कोणों के मापों का योगफल 90^0 हो, तो उन्हें *पूरक कोण* (complementry angles) कहते हैं।

अतः 50^0 एवं 130^0 के कोण सम्पूरक हैं, जबकि 50^0 एवं 40^0 के कोण पूरक हैं।

अब हम आकृति 8.8 को देखते हैं। ध्यान दीजिए कि ∠AOC एवं ∠BOC में

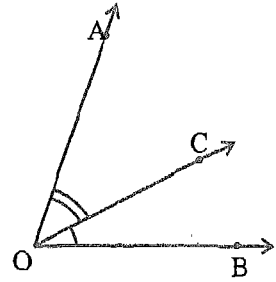
(i) उनका एक ही शीर्ष बिंदु O है,

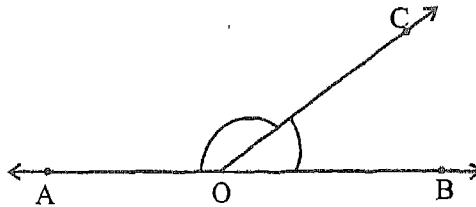
(ii) उनकी एक उभयनिष्ठ भुजा OC है एवं

(iii) उनके अभ्यंतर अनतिव्यापी (non- overlapping) हैं।

आकृति 8.8

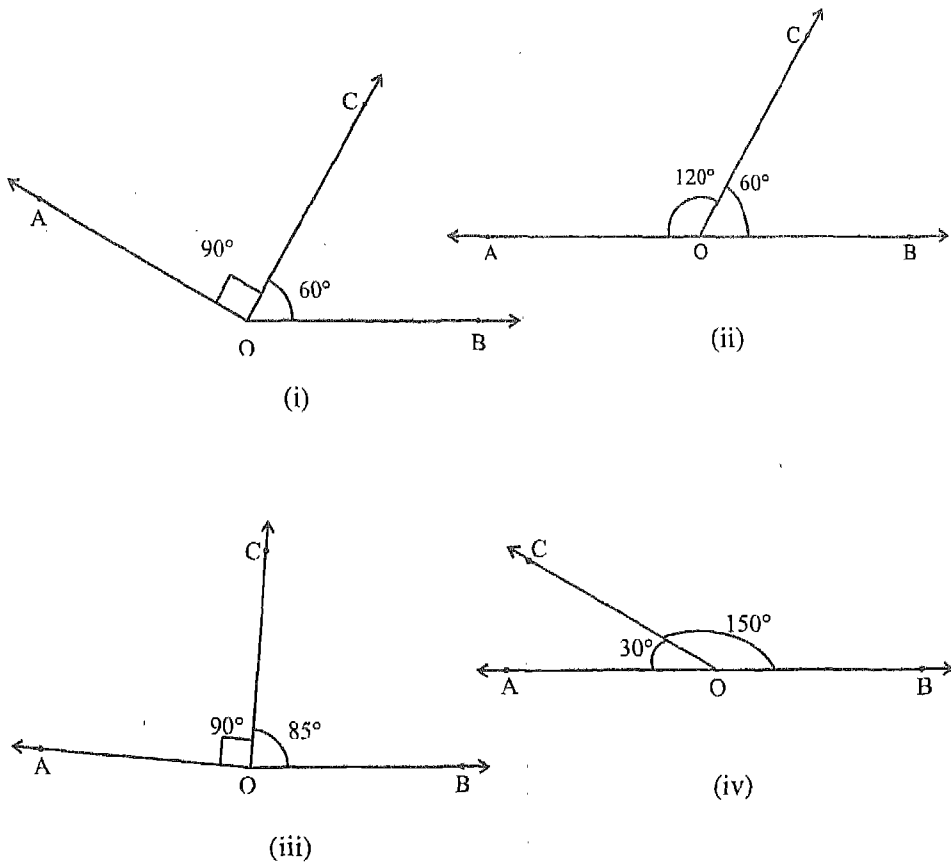
इस प्रकार के कोणों को *आसन्न कोण* (adjacent angles) कहते हैं। इस पर भी यहाँ ध्यान दें कि

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$$

अब हम एक रेखा AB लेते हैं और उस पर एक बिंदु O चिंहित करते हैं। O से एक किरण OC खींचिए जैसा कि आकृति 8.8 में दर्शाया गया है। स्पष्टत: $\angle AOC$ और $\angle BOC$ आसन्न कोण हैं, जिनकी उभयनिष्ठ भुजा OC है। उनकी अन्य भुजाओं OA और OB के संबंध में आप क्या कह सकते हैं? ध्यान दीजिए कि वे विपरीत किरणें हैं। दो आसन्न कोणों को, जिनकी भिन्न भुजाएँ दो विपरीत किरणें दी हों, रैखिक युग्म (linear pair) कहते हैं।

अत: आकृति 8.9 के $\angle AOC$ और $\angle BOC$ रैखिक युग्म बनाते हैं। प्रोट्रेक्टर की सहायता से $\angle AOC$ और $\angle BOC$ नापिए एवं उनका योग ज्ञात कीजिए। एक रेखा खींचकर

आकृति 8.9

उसके एक बिंदु पर किरण बनाने की प्रक्रिया की हम पुनरावृति कर सकते हैं। प्रत्येक बार हमें प्राप्त होगा कि इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180^0 है (मापन में यथार्थता की कमी के कारण गौण अंतर पर ध्यान न दें) अत: हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं :

गुणधर्म 8.4 : *यदि एक किरण का सिरा, किसी रेखा पर स्थित हो, तो इस प्रकार बने दो आसन्न कोणों का योग 180^0 होता है या रैखिक युग्म बनाने वाले कोणों का योग 180^0 होता है।*

अब हम भिन्न मापों के दो आसन्न कोण AOC और BOC बनाते हैं जैसा कि आकृति 8.10 (i), (ii), (iii), एवं (iv) में दर्शाया गया है। अब हम एक रूलर लेते हैं और जाँच करते हैं कि इन आकृतियों में बिंदु A,O और B एक ही रेखा पर स्थित हैं कि नहीं अर्थात् OA एवं OB विपरीत किरणें हैं कि नहीं।

आकृति 8.10

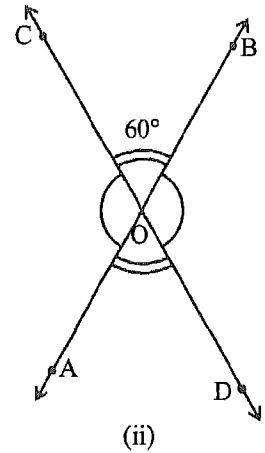
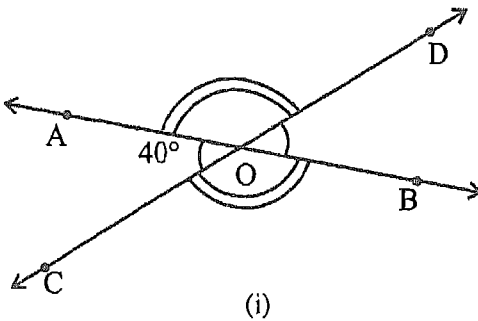
हम देखते हैं कि (ii) और (iv) में (उन स्थितियों में जहाँ आसन्न कोणों का योग 180^0 है) बिंदु A,O और B एक ही रेखा पर स्थित हैं, तथा इसीलिए विपरीत किरणें OA और OB बनाते हैं। दूसरी स्थितियों में यह सत्य नहीं है। इसलिए हम निम्नलिखित परिणाम पर ध्यान दें, जो कि पिछले परिणाम का विलोम है।

गुणधर्म 8.5 : *यदि दो आसन्न कोणों का योग 180^0 हो, तो उनकी उभयनिष्ठ भुजा को छोड़कर अन्य भुजाएँ विपरीत किरणें होती हैं।*

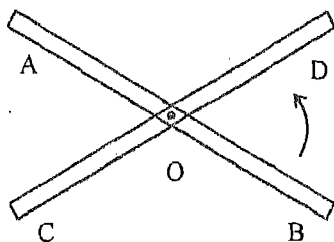
स्पष्टत: गुणधर्म 8.4 अपने विलोम (अर्थात् गुणधर्म 8.5) सहित *रैखिक युग्म अभिगृहीत* कहलाता है।

टिप्पणी : चूंकि दो संपूरक कोणों का योग 180^0 होता है, अत: रैखिक युग्म अभिगृहीत का कथन विकल्पत: इस प्रकार भी दे सकते हैं:

दो आसन्न कोण एक रैखिक युग्म होते हैं, यदि और केवल यदि वे सम्पूरक कोण हों।

अब हम दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ AB और CD जिनका, प्रतिच्छेद बिंदु O है (आकृति 8.11(i) और (ii)) याद कीजिए कि $\angle AOC$ एवं $\angle BOD$ *शीर्षाभिमुख कोण* (vertically opposite angles) हैं। इसी प्रकार $\angle AOD$ और $\angle BOC$ भी शीर्षाभिमुख कोण हैं।

आकृति 8.11

यदि आकृति 8.11(i) में, $\angle AOC = 40^0$ हो तो क्या आप $\angle AOD$ और $\angle BOC$ को ज्ञात कर सकते है? क्या वे समान हैं? इसी प्रकार यदि आकृति 8.11(ii) में $\angle BOC = 60^0$ हो तो क्या आप $\angle AOC$ एवं $\angle BOD$ को ज्ञात कर सकते हैं? क्या वे समान हैं? हम देख सकते हैं कि (i) में $\angle AOD = \angle BOC = 140^0$ एवं (ii) में $\angle AOC = \angle BOD = 120^0$। अत: प्रत्येक स्थिति में कोण समान हैं।

अब हम दो पतली छड़ AB एवं CD लेते हैं तथा आकृति 8.12 के अनुसार O पर कील ठोक देते हैं। अब हम स्टिक AB को बिंदु O के परित: घुमाते हैं, जब तक OB, OD के अनुस्थित न हो जाए। क्या OA भी OC के अनुस्थित हो जाता है? हाँ, वह होता है। $\angle AOC$ और $\angle BOD$ के संबंध में हम क्या धारणा बना सकते हैं? यही न कि ये दोनों कोण समान हैं। यह इस तथ्य का परिणाम है कि OB से OD तक के घूर्णन का परिमाण वही है जो कि OA से OC तक के घूर्णन का है। अत: $\angle BOD = \angle AOC$

आकृति 8.12

उपरोक्त क्रिया के आधार पर हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करते हैं:

गुणधर्म 8.6 : *यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिछेद करें, तो शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।*

अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा उपरोक्त गुणधर्मों को प्रदर्शित करते हैं।

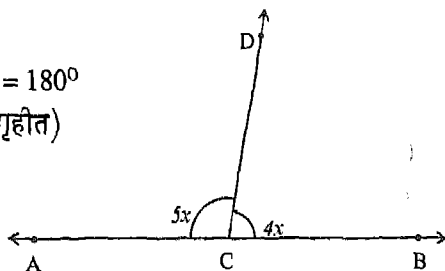
उदाहरण 1 : आकृति 8.13 में, ACB एक रेखा है

$\angle DCA = 5x$ और $\angle DCB = 4x$

x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हमें ज्ञात है कि $\angle ACD + \angle BCD = 180^0$
(रैखिक युग्म अभिगृहीत)

$\therefore \quad 5x + 4x = 180^\circ$

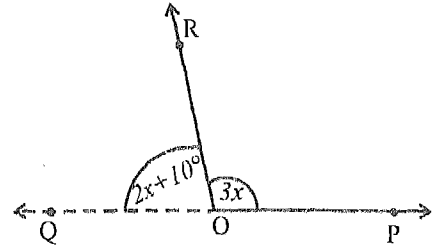
या, $\quad x = \dfrac{180^0}{9} = 20^0$

आकृति 8.13

उदाहरण 2 : दिया है कि $\angle POR = 3x$ और $\angle QOR = 2x + 10^\circ$, x का मान ज्ञात कीजिए जिससे कि POQ एक रेखा बने। (आकृति 8.14)

हल : POQ एक रेखा होगी यदि $\angle QOR + \angle POR = 180^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

अर्थात् $2x + 10^\circ + 3x = 180^\circ$

अर्थात् $5x = 170^\circ$

या $x = 34^\circ$

आकृति 8.14

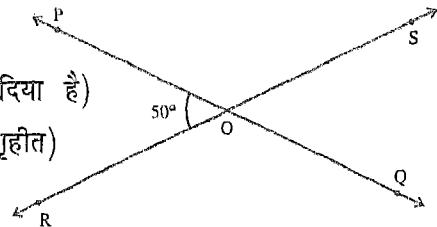
उदाहरण 3 : आकृति 8.15 में दो रेखाएँ PQ और RS बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POR = 50^0$, तो $\angle QOS$, $\angle POS$ एवं $\angle QOR$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें ज्ञात है कि

$\angle POR = \angle QOS$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore$ $\angle QOS = 50^0$ (क्योंकि $\angle POR = 50^0$ दिया है)

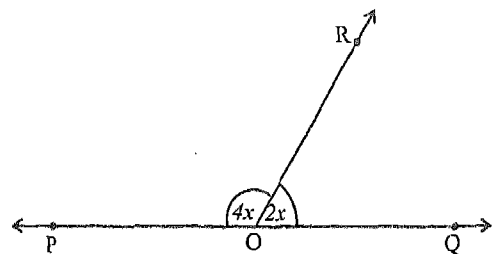
अब $\angle POS = 180^0 - 50^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत)

$= 130^0$

आकृति 8.15

$\therefore$ $\angle QOR = \angle POS = 130^0$ (शीर्षभिमुख कोण)

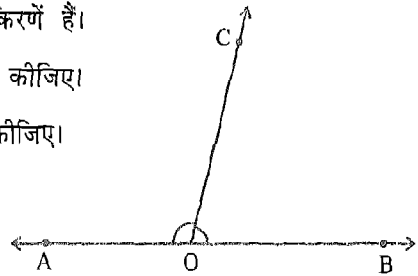
अत: $\angle QOS = 50^0$, $\angle POS = 130^0$ एवं $\angle QOR = 130^0$

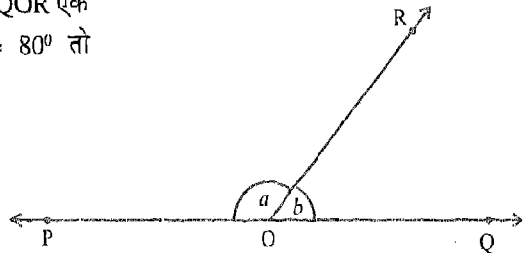
प्रश्नावली 8.1

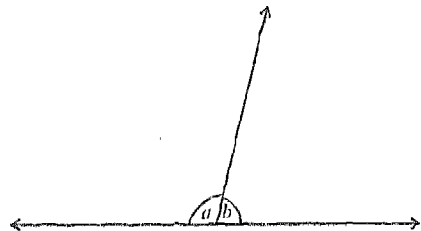
1. आकृति 8.16 में, POQ एक रेखा है, $\angle POR = 4x$ और $\angle QOR = 2x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.16

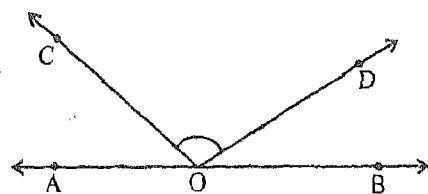
2. आकृति 8.17 में, OA और OB विपरीत किरणें हैं।

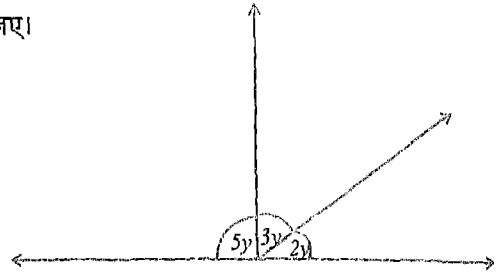
   (i) यदि $\angle BOC = 75^0$ तो $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।

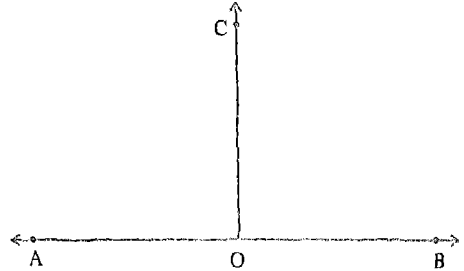
   (ii) यदि $\angle AOC = 110^0$, $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.17

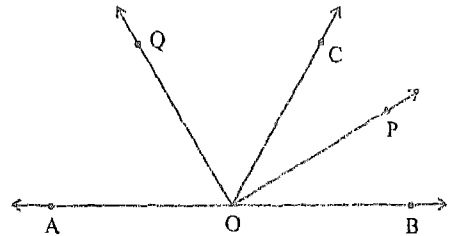
3. आकृति 8.18 में, $\angle POR$ और $\angle QOR$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं। यदि $a - b = 80^0$ तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.18

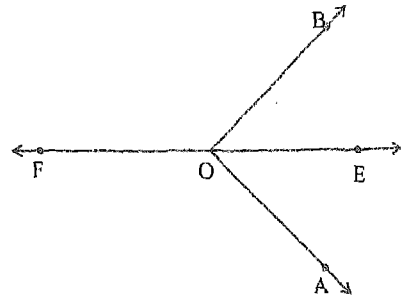
4. आकृति 8.19 में, a, b से एक समकोण के एक-तिहाई भाग से बड़ा हो, तो a एवं b के मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.19

5. आकृति 8.20 में,
   यदि $\angle AOC + \angle BOD = 70^0$,
   तो $\angle COD$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.20

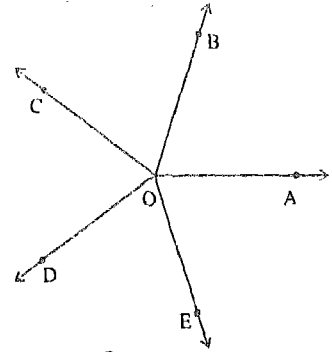
6. आकृति 8.21 में y का मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.21

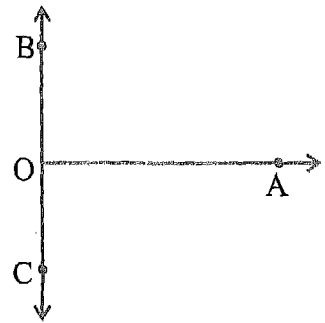
7. यदि किरण OC रेखा AB पर इस प्रकार स्थित हो कि $\angle AOC = \angle BOC$ (आकृति 8.22), तो दर्शाइए कि $\angle AOC = 90^0$

आकृति 8.22

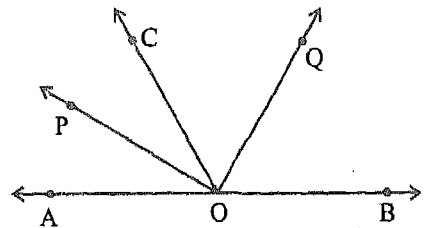
8. आकृति 8.23 में, यदि OP $\angle BOC$ को तथा OQ, $\angle AOC$ को समद्विभाजित करती हों, तो दर्शाइये कि $\angle POQ$ एक समकोण है।

आकृति 8.23

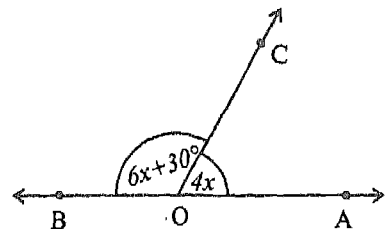
9. किरण OE, $\angle AOB$ को समद्विभाजित करती है और किरण OF, OE के विपरीत है। (आकृति 8.24) दिखाइए कि $\angle FOB = \angle FOA$

आकृति 8.24

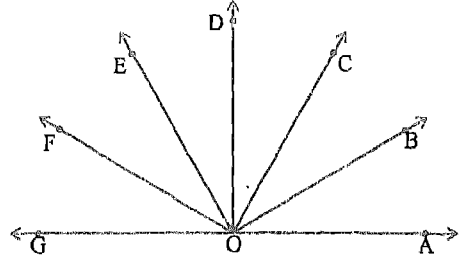
10. किरणों OA, OB, OC, OD और OE का एक सर्वनिष्ठ अन्त बिन्दु O है। (आकृति 8.25) दर्शाइये कि $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360^0$

(संकेत : किरण OA के विपरीत एक किरण OP खींचिए)

आकृति 8.25

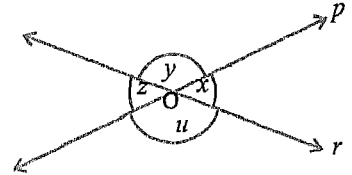
11. यदि $\angle AOC$ और $\angle AOB$ समकोण हों (आकृति 8.26), तो दर्शाइए कि BOC एक रेखा है।

आकृति 8.26

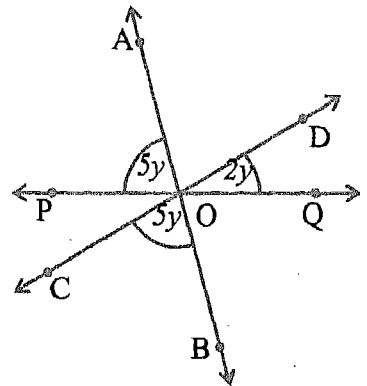
12. आकृति 8.27 में OP, $\angle AOC$ को समद्विभाजित करती है, OQ, $\angle BOC$ को समद्विभाजित करती है, और $OP \perp OQ$। दर्शाइये कि बिंदु A, O, B संरेख हैं।

आकृति 8.27

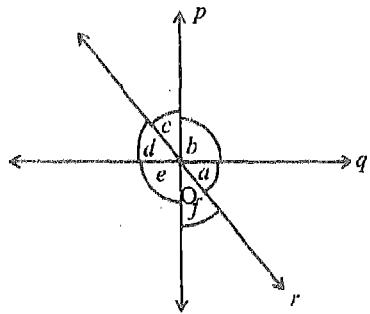
13. आकृति 8.28 में x के किस मान द्वारा AOB एक रेखा बनेगी यदि $\angle AOC = 4x$ और $\angle BOC = 6x + 30^0$ हो?

आकृति 8.28

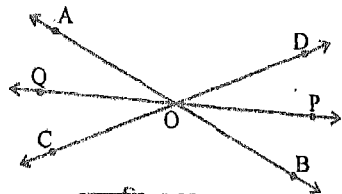
14. आकृति 8.29 में, $\angle AOF$ और $\angle FOG$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं, $\angle EOB = \angle FOC = 90^0$ एवं $\angle DOC = \angle FOG = \angle AOB = 30^0$

आकृति 8.29

   (i) $\angle FOE, \angle COB$ और $\angle DOE$ के माप ज्ञात कीजिए।
   (ii) आकृति के सभी समकोणों के नाम लिखिए।
   (iii) तीन आसन्न पूरक कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।
   (iv) तीन पूरक कोणों के युग्मों के नाम लिखिए जो (iii) में सम्मिलित न हों।
   (v) तीन आसन्न कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।
   (vi) तीन आसन्न सम्पूरक कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।
   (vii) तीन सम्पूरक कोणों के युग्मों के नाम लिखिए जो (vi) में सम्मिलित न हों।

15. आकृति 8.30 में रेखाएँ p एवं r O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $x = 45^0$, तो $y, z,$ और u ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.30

16. आकृति 8.31 में, AB, CD और PQ तीन रेखाएँ हैं, जो कि O पर संगामी हैं। यदि $\angle AOP = 5y$, $\angle QOD = 2y$ और $\angle BOC = 5y$, तो y का मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.31

17. आकृति 8.32 में, तीन रेखाएँ p, q और r बिंदु O पर संगामी हैं। यदि $\angle a = 50^0$ और $b = 90^0$ हो तो c, d, e एवं f ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.32

18. आकृति 8.33 में, AB और CD दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। OP और OQ क्रमश: $\angle BOD$ और $\angle AOC$ के समद्विभाजक हैं। दर्शाइये कि OP और OQ विपरीत किरणें हैं।

आकृति 8.33

19. दो परस्पर प्रतिच्छेद रेखाओं से बने चार कोणों में से एक समकोण है। दर्शाइये कि अन्य तीन कोण भी समकोण होंगे।

20. तीन संगामी रेखाएँ AB, CD, और EF बिंदु O से होकर इस प्रकार जाती हैं कि OF, $\angle BOD$ को समद्विभाजित करती है। यदि $\angle BOF = 35^0$, तो $\angle BOC$ और $\angle AOD$ ज्ञात कीजिए।

21. निम्नलिखित कथनों में से कौन सत्य (T) हैं और कौन असत्य (F)? कारण दीजिए।
    (i) रैखिक युग्म बनाने वाले कोण सम्पूरक होते हैं।
    (ii) यदि दो आसन्न कोण समान हैं, तब प्रत्येक कोण 90^0 का है।
    (iii) रैखिक युग्म बनाने वाले दोनों कोण न्यून कोण हो सकते हैं।
    (iv) किसी तल में दो भिन्न रेखाओं के दो उभयनिष्ठ बिंदु हो सकते हैं।
    (v) यदि रैखिक युग्म बनाने वाले कोण समान हों, तो इन में से प्रत्येक कोण 90^0 का है।
    (vi) यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं और यदि शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म न्यून कोणों से बना है, तब शीर्षभिमुख कोणों का दूसरा युग्म अधिक कोणों द्वारा बनेगा।
    (vii) यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं और इस प्रकार निर्मित कोणों में से एक समकोण है, तब अन्य तीन कोण समकोण नहीं होंगे।

22. रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए निम्नलिखित कथन सत्य हों:

(i) एक तल में दो भिन्न बिंदु एक .... रेखा को निर्धारित करते हैं।

(ii) किसी तल में दो भिन्न .... के एक से अधिक उभयनिष्ठ बिंदु नहीं हो सकते।

(iii) यदि एक रेखा दी हो और एक बिंदु दिया हो, जो रेखा पर न हो, तो एक और केवल .... ऐसी रेखा होती है जो उस बिंदु से होकर जाए एवं दी हुई रेखा के .... हो।

(iv) एक रेखा तल को .... भागों में बाँट देती है, जिनके नाम हैं दोनों .... एवं स्वयं ....।

(v) यदि रैखिक युग्म का एक कोण न्यून है, तब दूसरा .... कोण होगा।

(vi) यदि एक किरण एक रेखा पर स्थित है, तब इस प्रकार निर्मित दो आसन्न कोणों का योग .... होगा।

(vii) यदि दो आसन्न कोणों का योग 180^0 हो, तो उन की .... भुजाएँ विपरीत किरणें होती हैं।

(viii) यदि दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, तो शीर्षाभिमुख कोण .... होते हैं।

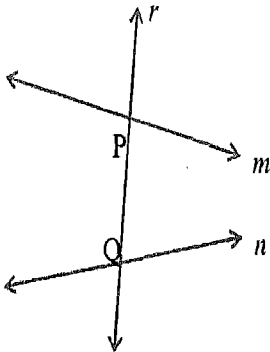
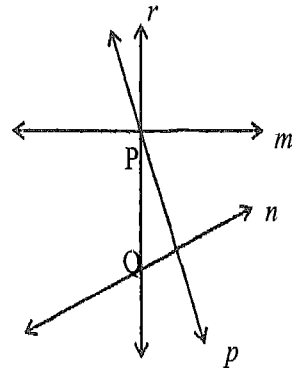
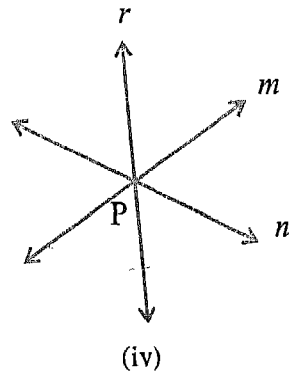
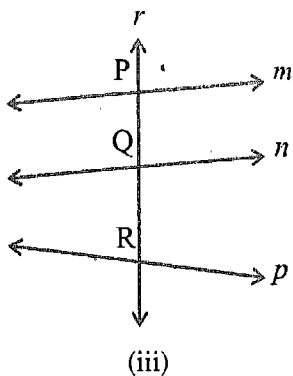
8.7 दो रेखाओं के साथ तिर्यक रेखा द्वारा बनाए गए कोण

याद कीजिए कि यदि एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं को *भिन्न-भिन्न* बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करे, तो उसे उन दी हुई रेखाओं की *तिर्यक् रेखा* (transversal) कहते हैं।

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

आकृति 8.34

उदाहरण के लिए, आकृति 8.34 (i) से (iv) में, स्थिति (i) में r एक तिर्यक् रेखा है क्योंकि वह दो रेखाओं m और n को दो बिंदुओं P एवं Q पर प्रतिच्छेद करती है और स्थिति (iii) में r एक तिर्यक् रेखा है क्योंकि वह तीन रेखाओं m, n और p को तीन बिंदुओं P, Q एवं R पर प्रतिच्छेद करती है, लेकिन स्थिति (ii) में r एक तिर्यक् रेखा नहीं है क्योंकि वह *तीन* रेखाओं m, n और p को केवल *दो* बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। इसी प्रकार स्थिति (iv) में r एक तिर्यक् रेखा नहीं है क्योंकि वह *दो* रेखाओं m और n को *केवल एक* बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है।

अब हम आकृति 8.35 पर ध्यान दें जिस में AB और CD दो रेखाएँ हैं और उन्हें एक तिर्यक् रेखा LM बिन्दुओं P एवं Q पर प्रतिच्छेद करती है। यहाँ आठ कोण बन रहे हैं: चार कोण बिन्दु P पर और चार कोण बिन्दु Q। याद कीजिए कि आकृति में इन कोणों की अपनी स्थितियों को देखते हुए इन में से कुछ कोणों के निम्नलिखित युग्म बनाए जा सकते हैं:

(a) *संगत कोणों के युग्म*

(i) $\angle 1$ और $\angle 5$

(ii) $\angle 2$ और $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ और $\angle 8$

(iv) $\angle 3$ और $\angle 7$

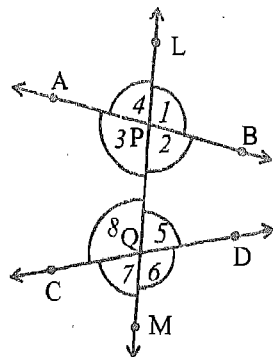
(b) *एकांतर अन्त:कोणों के युग्म*

(i) $\angle 3$ और $\angle 5$

(ii) $\angle 2$ और $\angle 8$

(c) *तिर्यक् रेखा के एक ही ओर के अन्त:कोणों के युग्म*

(i) $\angle 2$ और $\angle 5$

(ii) $\angle 3$ और $\angle 8$

आकृति 8.35

टिप्पणी : 1. इस पुस्तक के विचार विमर्श में हम 'एकांतर अन्त:कोण' के स्थान पर 'एकांतर कोण' लिखेंगे।

2. कभी-कभी '*तिर्यक् रेखा के एक ही ओर के अन्त:कोणों*' को *'क्रमागत अन्त:कोण'* भी लिखा जाता है।

सामान्यत: इन कोण युग्मों के कोणों के बीच कोई संबंध नहीं होता है। परन्तु, यदि रेखाएँ समांतर हों, तो प्रत्येक युग्म के कोणों के बीच बड़े ही उपयोगी संबंध होते हैं। याद कीजिए कि पिछली कक्षाओं में प्रयोगों द्वारा हमने निम्नलिखित परिणामों की सत्यता को देखा है :

यदि एक तिर्यक् रेखा, दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तो

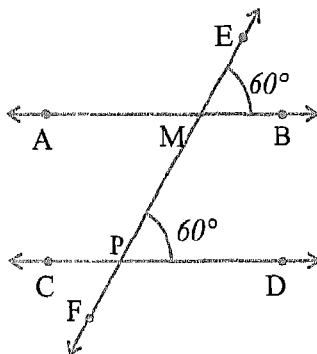
(i) प्रत्येक युग्म के संगत कोण बराबर होते हैं।

(ii) प्रत्येक युग्म के एकांतर कोण बराबर होते हैं।

(iii) तिर्यक् रेखा के एक ही और के प्रत्येक युग्म के अन्त:कोण सम्पूरक होते हैं।

क्या हम उपरोक्त प्रकथनों में से प्रत्येक को सिद्ध कर सकते हैं? नहीं, हमें इन प्रकथनों में से कम से कम एक को उपपत्ति के बिना सत्य स्वीकारना होगा। अत: हम निम्न परिणाम को उपपत्ति के बिना सत्य मानते हैं :

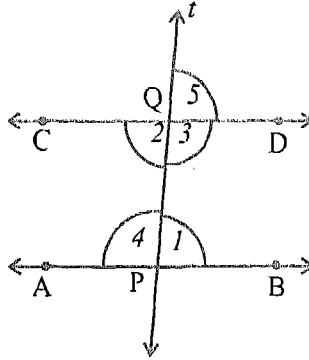
गुणधर्म 8.7 *यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो प्रत्येक युग्म के संगत कोण समान होते हैं और विलोमत: यदि एक तिर्यक् रेखा दो रेखाओं*

को इस प्रकार प्रतिच्छेद करें कि एक युग्म के संगत कोण समान हों, तो रेखाएँ समांतर होती हैं। इस परिणाम को संगत कोण अभिगृहीत कहते हैं। दो समांतर रेखाएँ एवं तिर्यक् रेखा खींचकर प्रायोगिक कार्य द्वारा इस परिणाम की सत्यता को सत्यापित किया जा सकता है, जैसा कि पिछली कक्षाओं में किया था। विलोम की सत्यता को निम्नलिखित रूप से सत्यापित किया जा सकता है।

आकृति 8.36

हम एक रेखा EF खींचते हैं उस पर बिंदुओं M एवं P के चिन्ह बनाते हैं (आकृति 8.36)। M और P पर दो परस्पर बराबर कोण EMB एवं MPD आकृति के अनुसार बनायें। BM और DP को भुजा EF के दूसरी ओर बढ़ाइये, जिससे कि रेखाएँ AB ओर CD बन जायें।

हम देखते हैं कि दोनों रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं और इसलिए वे समांतर हैं। इस प्रकार हमें विलोम प्राप्त हो गया कि *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि एक युग्म के संगत कोण समान हैं, तब रेखाएँ समान्तर होती है।* अब हम समान्तर रेखाओं और उनकी तिर्यक् रेखा से संबंधित अन्य परिणाम सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 8.1 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेत करती है, तो प्रत्येक युग्म के एकांतर कोण समान होते हैं।*

दिया है : $AE \parallel CD$ तिर्यक रेखा t, AB को P पर और CD को Q पर इस प्रकार काटती है कि एकांतर कोणों के दो युग्म बनते हैं : $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3, \angle 4$ (आकृति 8.37)

आकृति 8.37

सिद्ध करना है : $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$

उपपत्ति : $\angle 2 = \angle 5$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$

क्योंकि किरण PQ रेखा AB पर स्थित है

$\therefore$ $\angle 1 + \angle 4 = 180^0$ (रैखिक युग्म)

इसी प्रकार $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (रैखिक युग्म)

$\therefore$ $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

परंतु $\angle 1 = \angle 2$ (ऊपर (1) में सिद्ध किया है)

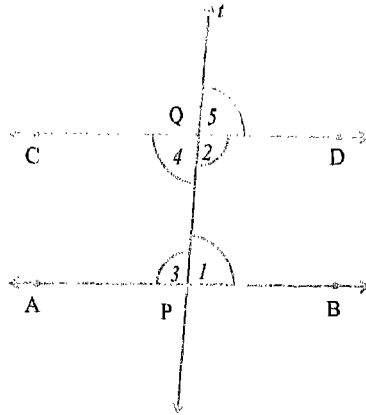
$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$

अत: $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$

प्रमेय 8.2 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो तिर्यक् रेखा के एक ओर के प्रत्येक अन्त: कोणों के युग्म संपूरक होते हैं।*

दिया है : AB || CD तिर्यक रेखा t, रेखा AB को P पर और रेखा CD को Q पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि तिर्यक रेखा के एक ओर अन्त: कोणों के दो युग्म बनते हैं: $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3, \angle 4$ (आकृति 8.38)

आकृति 8.38

सिद्ध करना है : $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$ और

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$$

उपपत्ति : किरण QD रेखा t पर स्थित है

$\therefore \quad \angle 2 + \angle 5 = 180^0$ (रैखिक युग्म)

और $\quad \angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण)

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 2 = 180^0$ . . . (1)

अब किरण PQ रेखा AB पर स्थित है

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 3 = 180^0$ (रैखिक युग्म) . . . (2)

और किरण PQ रेखा CD पर स्थित है

$\therefore \quad \angle 2 + \angle 4 = 180^0$ (रैखिक युग्म) . . . (3)

(2) और (3) को जोड़ने पर

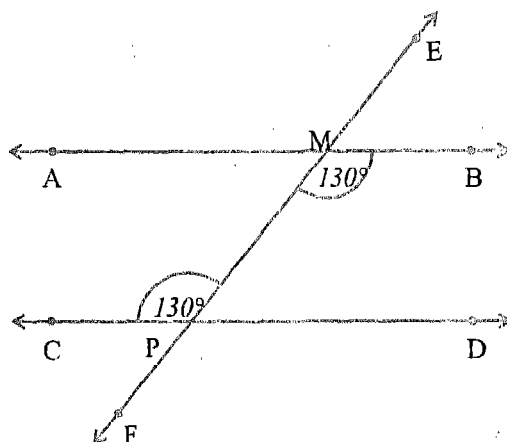
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$$

परंतु $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$ (ऊपर (1) में सिद्ध किया है)

$\therefore \quad \angle 3 + \angle 4 = 360^0 - 180^0 = 180^0$

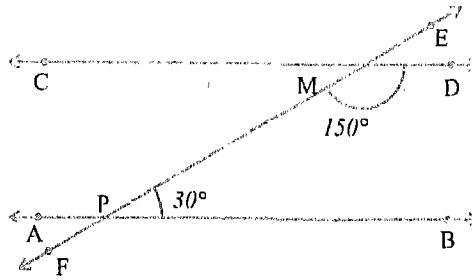
अत: $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$ और $\angle 3 + \angle 4 = 360^0$

प्रमेय 8.1 और 8.2 में से प्रत्येक का विलोम निम्न प्रकार से सत्यापित किया जा सकता है :

हम एक रेखा EF खींचते हैं और उस पर M एवं P बिंदुओं के चिन्ह बिनाते हैं (आकृति 8.38)। M एवं P पर दो परस्पर समान कोण BMF और CPM बनायें जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। BM और CP को आगे बढ़ाइये जिससे कि क्रमश: AB और CD रेखाएँ बन जाये। हम देखते हैं कि वे दो रेखाएँ परस्पर मिलती नहीं हैं, अत: वे समांतर हैं।

आकृति 8.39

अत: हमें प्रमेय 8.1 का आकांक्षित विलोम प्राप्त हो गया यत:

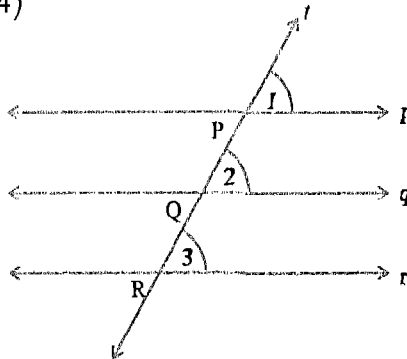
गुणधर्म 8.8 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि एक युग्म के एकांतर कोण समान हों, तो वे रेखाएँ समांतर होती हैं।*

हम एक रेखा EF खींचते हैं और उस पर M एवं P बिंदुओं के निशान बनाते हैं (आकृति 8.40)। M एवं P पर दो परस्पर संपूरक कोण DMP और BPM बनायें जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। DM और BP को आगे बढ़ाइये जिससे कि क्रमश: DC और BA रेखाएँ बन जायें। हम पुन: देखते हैं कि वे दो रेखाएँ परस्पर मिलती नहीं है, इसलिए वे समांतर हैं।

आकृति 8.40

इस प्रकार हमें प्रमेय 8.2 का विलोम प्राप्त हो गया। यत:

गुणधर्म 8.9 : *यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि तिर्यक् रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों का एक युग्म सम्पूरक हो, तो वे रेखाएँ समांतर होती हैं।*

8.8 एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ

अभी तक हम दो समांतर रेखाओं और एक तिर्यक् रेखा के संबंध में विचार कर रहे थे। एक ही रेखा के समांतर दो रेखाओं के संबंध में हम क्या कह सकते हैं? मान लो एक ही रेखा r के समांतर दो रेखाएँ p और q हैं। एक तिर्यक रेखा t खींचिए (आकृति 8.14)

आकृति 8.41

प्रोट्रेक्टर का केंद्र Q पर स्थित कर हम सरलता से देख सकते हैं कि संगत कोण 1 और 2 समान हैं, और इसलिए संगत कोण अभिगृहीत से p एवं q रेखाएँ समांतर हैं। इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम दृष्टिगोचर होता है :

गुणधर्म 8.10 : *एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।*

यह ध्यान रखा जाए कि उपरोक्त परिणाम तर्कसंगत विवेचना द्वारा सरलता से सिद्ध किया जा सकता है। आइए कुछ उदाहरणों से इन परिणामों की उपयोगिता को प्रदर्शित करें।

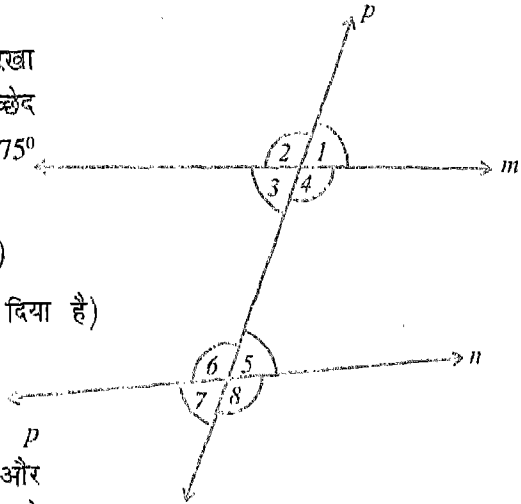
उदाहरण 4 : आकृति 8.42 में तिर्यक् रेखा p दो रेखाओं m और n को प्रतिच्छेद करती है, $\angle 4 = 110^0$ और $\angle 7 = 175^0$ क्या $m \parallel n$ हैं?

आकृति 8.42

हल : $\angle 5 = \angle 7$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \quad \angle 5 = 65^0$ (क्योंकि $\angle 7 = 65^0$ दिया है)

$\therefore \quad \angle 4 + \angle 5 = 110^0 + 65^0 = 175^0$

क्योंकि $\angle 4$ और $\angle 5$ तिर्यक् रेखा p के एक ही ओर के अन्तः कोण हैं और उनका योगफल 180^0 नहीं है (अर्थात् वे सम्पूरक नहीं हैं) इसलिए, m एवं n समांतर नहीं हैं।

उदाहरण 5 : आकृति 8.43 में q और r की p एक तिर्यक् रेखा है। $q \parallel r$ और $\angle 1 = 85^0$ तो $\angle 6$ एवं $\angle 7$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle 1 = \angle 3$ (शीर्षाभिमुख कोण)

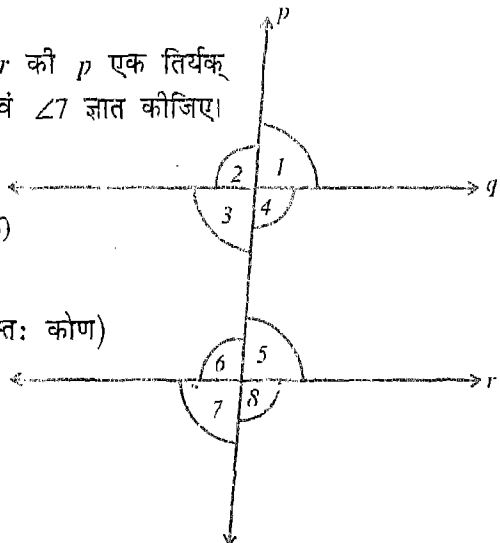
$\therefore \quad \angle 3 = 85^0$ ($\angle 1 = 95^0$ दिया है)

अब $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

(तिर्यक् रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण)

$\therefore \quad \angle 6 = 180^0 - 85^0 = 85^0$

तथा $\quad \angle 3 = \angle 7$ (संगत कोण)

$\therefore \quad \angle 7 = 85^0$

इस प्रकार $\angle 6 = 95^0$ और $\angle 7 = 85^0$

आकृति 8.43

उदाहरण 6 : आकृति 8.44 में, AB ∥ CD और BC ∥ ED है। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC = \angle FDE$

आकृति 8.44

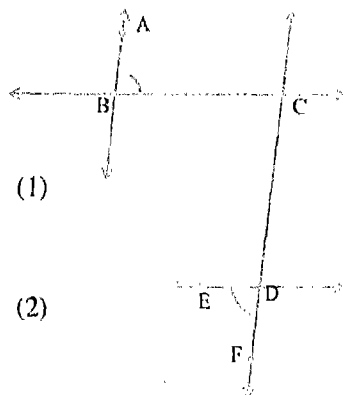
हल : AB ∥ CD (दिया है)

∴ $\angle ABC = \angle BCF$ (एकांतर कोण).......... (1)

तथा BC ∥ ED (दिया है)

∴ $\angle BCF = \angle FDE$ (संगत कोण)........... (2)

∴ (1) और (2) से हमे प्राप्त होता है कि

$\angle ABC = \angle FDE$

उदाहरण 7 : AB और CD दो समांतर रेखाएँ हैं और P उनके बीच में एक बिंदु है, जैसा कि आकृति 8.45 में दर्शाया गया है। सिद्ध कीजिये कि $\angle ABP + \angle CDP = \angle DPB$

हल: P से AB के समांतर रेखा PM खींचिए। अब PM ∥ AB (रचना से)

आकृति 8.45

∴ $\angle ABP = \angle MPB$ (एकांतर कोण) ....(1)

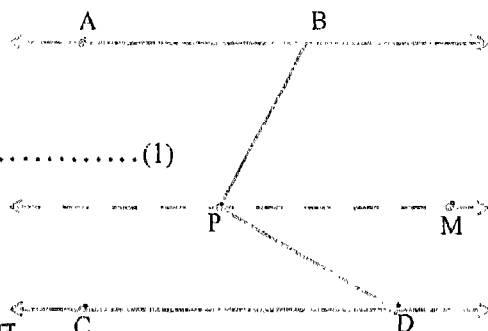
अब CD ∥ AB (दिया है)

और PM ∥ AB (रचना से)

∴ PM ∥ CD (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं)

∴ $\angle CDP = \angle MPD$ (एकांतर कोण) ....(2)

(1) और (2) का योग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$\angle ABP + \angle CDP = \angle MPB + \angle MPD = \angle DPB$

उदाहरण 8 : सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ, जो एक ही रेखा पर लंब हों, परस्पर समांतर होती हैं।

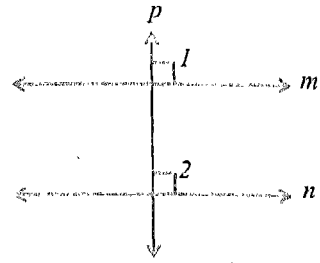
हल : माना रेखाएँ m, n, p ऐसी हैं कि $m \perp p$

आकृति 8.46

और $n \perp p$ (आकृति 8.46)। हमें सिद्ध करना है कि $m \parallel n$। अब $m \perp p$ इसलिए, $\angle 1 = 90^0$

$\therefore$ इसी प्रकार, $n \perp p$ $\angle 2 = 90^0$ अर्थात्

$\angle 1 = \angle 2$ परंतु ये तिर्यक् रेखा p द्वारा रेखाओं m और n पर बनाये गए संगत कोण हैं।

$\therefore$ $m \| n$

उदाहरण 9 : सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ, जो दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के क्रमशः समांतर हैं, परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

हल : माना रेखाएँ $m, n\ p$ और q ऐसी हैं कि $m \| p$, $n \| q$ तथा p एवं q बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 8.47)।

हमें सिद्ध करना है कि m और n को परस्पर माना किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करना चाहिए।

माना कि m और n परस्पर प्रतिच्छेदी नहीं हैं।

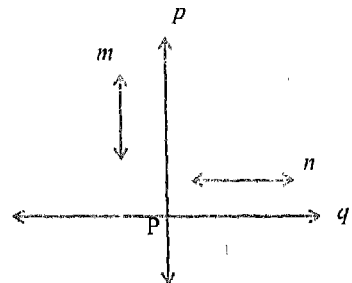
अर्थात् $m \| n$ (1)

अब, हमें ज्ञात है $p \parallel m$ (दिया है)

$\therefore$ $p \| n$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ समांतर होती हैं) (2)

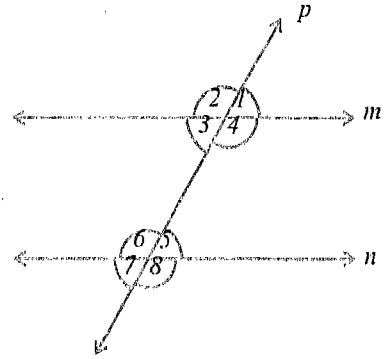
$\therefore$ अब $q \| n$ (दिया है)

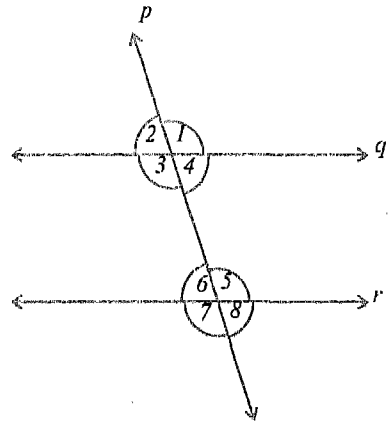
और $p \| n$ ((2) से)

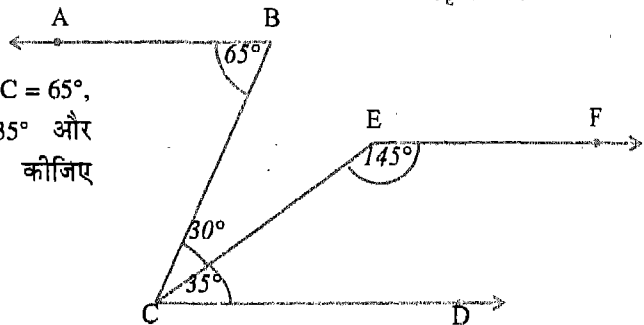
इस प्रकार बिंदु P से हमें दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ p और q प्राप्त होती हैं, जो कि n के समांतर हैं यह प्लेफेयर अभिगृहीत का विरोधी है। अतः हमारी कल्पना कि m और n परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, असत्य है। इसलिए m और n को परस्पर प्रतिच्छेद करना चाहिए।

आकृति 8.47

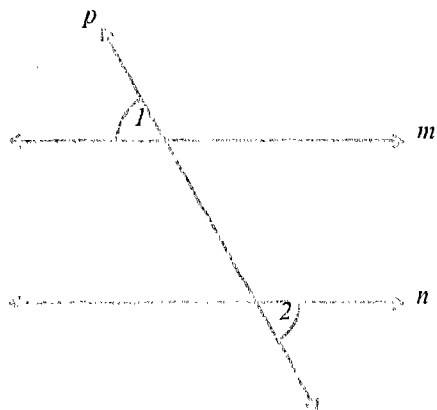
टिप्पणी : इस प्रकार की उपपत्ति को *अंतर्विरोध* या *विरोधाभास द्वारा उपपत्ति* कहते हैं।

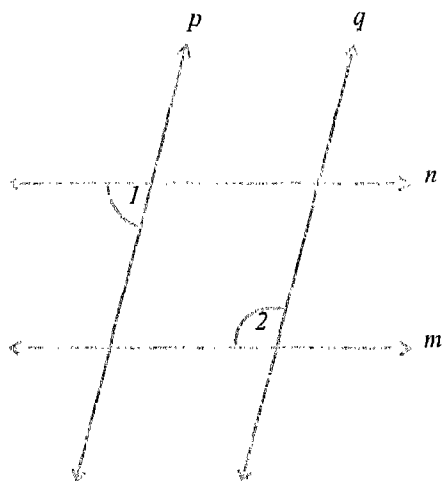
प्रश्नावली 8.[illegible]

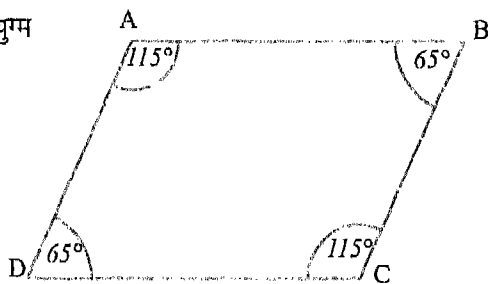
1. आकृति 8.48 में रेखाओं m और n की तिर्यक रेखा p है। $\angle 2 = 120^\circ$ और $\angle 5 = 60^\circ$ है। सिद्ध करो कि $m || n$

आकृति 8.48

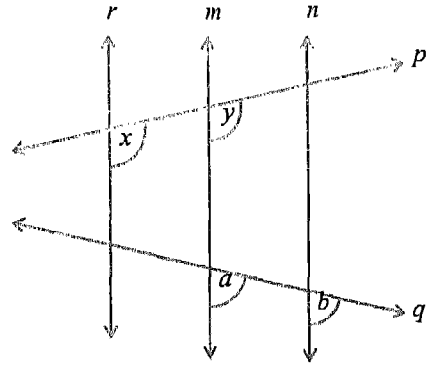
2. आकृति 8.49 में, $q || r$ तथा p इन दोनों की तिर्यक रेखा है। यदि $\angle 1$ और $\angle 2$, 3 : 2 के अनुपात में हैं, तो शेष कोण ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.49

3. आकृति 8.50 में, $\angle ABC = 65^\circ$, $\angle BCE = 30^\circ$ $\angle DCE = 35^\circ$ और $\angle CEF = 145^\circ$ है। सिद्ध कीजिए कि $AB || EF$

आकृति 8.50

4. आकृति 8.51 में, रेखाओं m और n की तिर्यक् रेखा p है। यदि $\angle 1 = 60°$ और $\angle 2 =$ एक समकोण का $\frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए कि $m \| n$ है।

आकृति 8.51

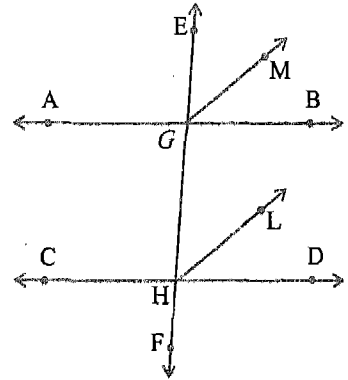
5. आकृति 8.52 में, $n \| m$ और $p \| q$ यदि $\angle 1 = 75°$ तो सिद्ध कीजिए $\angle 2 = \angle 1 +$ एक समकोण का $\frac{1}{3}$ है।

आकृति 8.52

6. आकृति 8.53 में, रेखाओं के कौन से युग्म समांतर हैं? कारण दीजिए।

आकृति 8.53

7. आकृति 8.54 में, यदि $x = y$ और $a = b$ तो सिद्ध कीजिए $r \| n$

आकृति 8.54

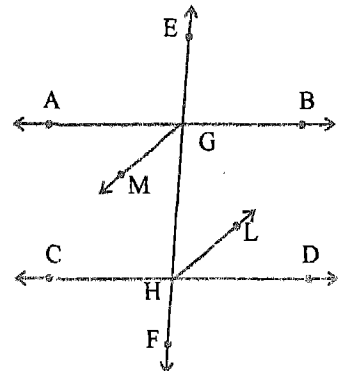
8. यदि p, m व n ऐसी तीन रेखाएँ हैं कि $p \| m$ और $n \perp p$, तो सिद्ध कीजिए कि $n \perp m$

9. आकृति 8.55 में EF दो समांतर रेखाओं AB और CD की तिर्यक् रेखा है। GM और HL क्रमशः संगत कोणों EGB और EHD के कोण समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए $GM \| HL$

(संकेत : पहले सिद्ध कीजिए $\angle EGB = \angle GHD$)

आकृति 8.55

10. यदि दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक् रेखा के द्वारा प्रतिच्छेदित की ज्ञाती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि कोई भी दो एकंतर कोणों के कोण समद्धिभाजक समांतर होंगे।

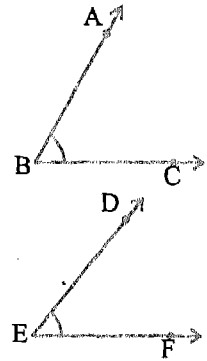
11. आकृति 8.56 में, एकांतर कोणों AGH और DHG के कोण समद्विभाजक क्रमशः GM और HL परस्पर समांतर हैं। सिद्ध कीजिए कि $AB \| CD$

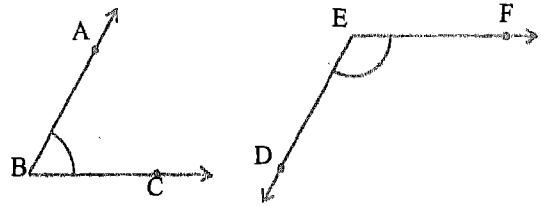
(संकेत : सिद्ध कीजिए कि $\angle AGH = \angle DHG$)

आकृति 8.56

12. यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक् रेखा इस प्रकार प्रतिच्छेदित करे, कि संगत कोणों के एक युग्म के कोण समद्विभाजक समांतर हो तो सिद्ध कीजिए कि दोनों रेखाएँ समान्तर हैं।

13. एक तिर्यक् रेखा, दी गई दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेदित करती है कि तिर्यक् रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण समान हैं। क्या यह हमेशा सत्य है कि दी गई रेखाएँ समांतर हैं? यदि नहीं, तो वह प्रतिबन्ध बताइए जिसके अंतर्गत वे रेखाएँ समांतर होंगी।

14. आकृति 8.57 में $\angle ABC$ की भुजाएँ BA और BC, $\angle DEF$ की भुजाओं ED और EF के क्रमशः समांतर हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC = \angle DEF$

(संकेत : मान लो ED, BC से किसी बिंदु P पर मिलती है)

आकृति 8.57

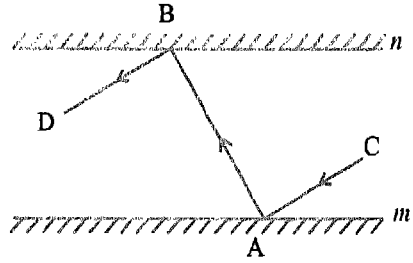
15. आकृति 8.58 में, $\angle ABC$ की भुजाएँ BA और BC कोण DEF की भुजाओं ED और EF के क्रमशः समांतर हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC + \angle DEF = 180^0$

आकृति 8.58

टिप्पणी : उपरोक्त प्रश्नों 14 और 15 को मिलाकर पुनर्कथन किया जा सकता है, यथा - *यदि दो कोणों में, एक की भुजाएँ दूसरे कोण की भुजाओं के क्रमशः समांतर हों, तो वे दोनों कोण या तो समान हैं या सम्पूरक।*

16. सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ जो दो समांतर रेखाओं पर क्रमशः लंब है, परस्पर समांतर होंगी।

17. सिद्ध कीजिए कि किसी दिये हुए बिंदु से दी गई रेखा पर केवल एक लंब खींचा जा सकता है। (संकेत : विरोधाभास द्वारा उपपत्ति दीजिए।)

18. सिद्ध कीजिए कि दो रेखाएँ, जो दो प्रतिच्छेदी रेखाओं पर क्रमश: लंब हैं, परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

19. आकृति 8.59 में, दो समतल दर्पण m और n एक दूसरे के समांतर हैं। दर्शाइये कि आपतित किरण (incident ray) CA परावर्तित किरण (reflected ray) BD के समांतर है।

आकृति 8.59

(संकेत : A और B से दोनो समतल दर्पणों पर लंब (अभिलंब) खींचिए। याद कीजिए कि *आपतन का कोण, परावर्तन के कोण* के बराबर होता है)

20. निम्नलिखित प्रकथनों में से कौन से सत्य (T) हैं और कौन से असत्य (F) हैं? कारण दीजिए
    (i) यदि दो रेखाएँ एक तिर्यक रेखा के द्वारा प्रतिच्छेदित होती है, तब संगत कोण बराबर होते हैं।
    (ii) यदि दो समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा के द्वारा प्रतिच्छेदित होती हों, तों एकांतर कोण बराबर होते हैं।
    (iii) दो रेखाएँ, जो कि एक ही रेखा पर लंब है, परस्पर लंब होती हैं।
    (iv) दो रेखाएँ, जो कि एक ही रेखा के समांतर हैं, परस्पर समांतर होती हैं।
    (v) यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्त: कोण समान होते हैं।

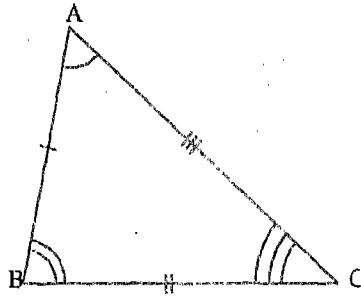
21. रिक्त स्थानों की पूर्त्ति इस प्रकार कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हों:
    (i) यदि, एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे, तो प्रत्येक युग्म के संगत कोण .... होते हैं।
    (ii) यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है, तो तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्त: कोण .... होते हैं।
    (iii) दो रेखाएँ, जो कि एक ही रेखा पर लंब हैं, परस्पर .... होती हैं।
    (iv) यदि, एक तिर्यक रेखा एक रेखायुग्म को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे, कि एक युग्म के एकांतर कोण समान हों, तो वे रेखाएँ .... होती हैं।

(v) एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ परस्पर .... होती हैं।

(vi) यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे, कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योगफल 180^0 हो, तो वे रेखाएँ .... होती हैं।

8.9 त्रिभुज के कोणों का योगफल

रेखाओं और कोणों का अध्ययन करने के पश्चात् अब हम एक समतल में स्थित ऐसी (ज्यामितीय) आकृतियों पर विचार करेंगे जो दो से अधिक रेखाओं द्वारा बनी हो। इन में त्रिभुज (triangle) सब से सरल आकृति है (आकृति 8.60) जो तीन रेखाओं से बनी है।

A
B C

आकृति 8.60

आप ने पिछली कक्षाओं में त्रिभुजों के संबंध में अध्ययन किया ही है। याद कीजिए कि त्रिभुज ABC के छः अवयव हैं, अर्थात् तीन कोण $\angle ABC$ (या $\angle B$), $\angle ACB$ (या $\angle C$) और $\angle BAC$ (या $\angle A$) और तीन भुजाएँ AB, BC ओर CA। त्रिभुजों का वर्गीकरण या तो उनकी भुजाओं के आधार पर या उनके कोणों के आधार पर निम्नलिखित रूप से कर सकते हैं :

a) भुजाओं के आधार पर

(i) ऐसे त्रिभुज को, जिसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर न हों, *विषमबाहु* (scalene) त्रिभुज कहते हैं।

(ii) ऐसे त्रिभुज को, जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों, *समद्विबाहु* (isosceles) त्रिभुज कहते हैं।

(iii) ऐसे त्रिभुज को, जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर हों, *समबाहु* (equilateral) त्रिभुज कहते हैं।

b) कोणों के आधार पर

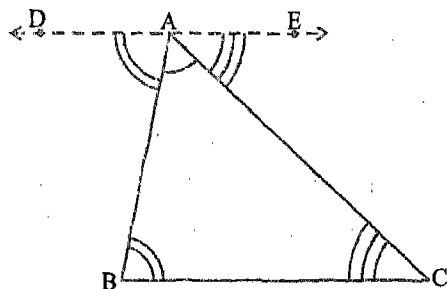
(i) ऐसे त्रिभुज को, जिसका प्रत्येक कोण न्यून होण हो, *न्यून कोण* त्रिभुज कहते हैं।

(ii) ऐसे त्रिभुज को, जिसका एक कोण समकोण हो, *समकोण त्रिभुज* कहते हैं।

(iii) ऐसे त्रिभुज को, जिसका एक कोण 'अधिक कोण' हो, *अधिक कोण* त्रिभुज कहते हैं।

पिछली कक्षाओं में हम ने एक त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के संबंध में बहुत से गुणधर्मो (परिणामों) का अध्ययन प्रयोगात्मक कार्य द्वारा किया है। क्या आपको एक त्रिभुज के कोणों से संबंधित गुणधर्म याद हैं? यथा एक त्रिभुज के कोणों का योगफल 180^0 है। यहाँ हम इस महत्वपूर्ण गुणधर्म का निगमन तर्क संगत विवेचना से करेंगे। इस गुणधर्म का महत्व उसकी इस निश्चित घोषणा में निहित है कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों को स्वेच्छ रूप से नहीं लिया जा सकता क्योंकि यदि किसी त्रिभुज के दो कोण दिए गये हैं तो तीसरा अपने आप निश्चित हो जाता है। अब हम इस परिणाम को सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 8.3 : *त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल $180°$ होता है।*

दिया है : एक त्रिभुज ABC जिसके तीन कोण है $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ (आकृति 8.61)

सिद्ध करना है : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

रचना : बिन्दु A से BC के समांतर रेखा DE खींचिए, जिससे कि दर्शाये गए कोण DAB एवं EAC बन जायें।

आकृति 8.61

उपपत्ति : DE||BC और AB एक तिर्यक् रेखा है।

$\therefore \angle B = \angle DAB$ (एकांतर कोण) (1)

इसी प्रकार $\angle C = \angle EAC$ (एकांतर कोण) (2)

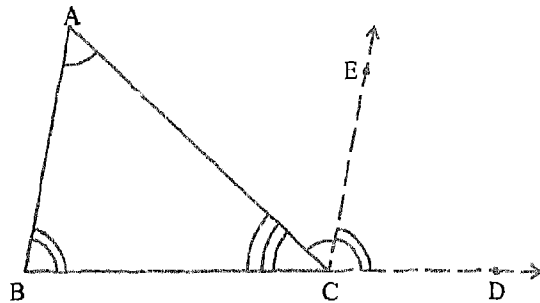
$\therefore \angle B + \angle C = \angle DAB + \angle EAC$ ((1) और (2) का योग करने पर)

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle DAB + \angle EAC$ (दोनों पक्षों में $\angle A$ योग करने पर)

परंतु $\angle A + \angle DAB + \angle EAC = 180^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहीत से)

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

विकल्पत: हम निम्न रूप से परिणाम सिद्ध कर सकते हैं:

दिया है : एक त्रिभुज ABC जिसके तीन कोण हैं $\angle A, \angle B$ और $\angle C$ (आकृति 8.62)

आकृति 8.62

सिद्ध करना है : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

रचना : भुजा BC को बढ़ाकर किरण CD बना दीजिए। C से BA के समांतर किरण CE खींचिए, इससे दर्शाए गए कोण $\angle ACE$ और ECD बनेंगे।

उपपत्ति : $BA \| CE$ और AC एक तिर्यक् रेखा है।

$\therefore \angle A = \angle ACE$ (एकांतर कोण) .... (1)

इसी प्रकार, $\angle B = \angle ECD$ (संगत कोण) .... (2)

(1) और (2) का योग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$\angle A + \angle B = \angle ACE + \angle ECD$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = \angle ACE + \angle EDC + \angle C$ (दोनों पक्षों मे $\angle C$ योग करने पर)

किंतु $\angle ACE + \angle ECD + \angle C = 180^0$ (रैखिक युग्म अभिगृहित)

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

याद कीजिए कि जब हम किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ा देते हैं हमें त्रिभुज का एक बहिष्कोण प्राप्त होता हैं। आकृति 8.62 में, BC को बढ़ाने से हमें $\angle ABC$ का बहिष्कोण ACD प्राप्त हुआ। अपनी पिछली कक्षाओं से यह भी याद कीजिए कि त्रिभुज के एक बहिष्कोण के संगत दो सुदूर अंत:कोण या अंत: अभिमुख कोण होते हैं। उदाहरण के लिए आकृति 8.62 में $\angle ABC$ के बहिष्कोण ACD के संगत $\angle A$ और $\angle B$ दो अंत: अभिमुख कोण हैं। अपनी पिछली कक्षाओं में हमने प्रयोगात्मक

रूप से सत्यापित किया है कि त्रिभुज का एक बहिष्कोण दो अंतः अभिमुख कोणों के योग के तुल्य होता है। आकृति 8.62 को समाहित करने वाली उपपत्ति में इस परिणाम का तर्कसंगत सत्य देखा जा सकता है, जहाँ हमने दर्शाया है कि $\angle A + \angle B = \angle ACE + \angle EDC$ और इसलिए, $\angle A + \angle B = \angle ACD$ उपरोक्त को ध्यान में रखकर हम निम्न परिणाम का अवलोकन करें।

गुणधर्म 8.11 : *यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए तो इस प्रकार बना बहिष्कोण दो अन्तः अभिमुख कोणों के योगफल के बराबर होता है।*

टिप्पणी : 1. इस परिणाम को कभी-कभी *बहिष्कोण प्रमेय* कहते हैं।

2. इस परिणाम से यह स्पष्ट है कि *एक बहिष्कोण दोनों अंतः अभिमुख कोणों में से प्रत्येक से सदैव बड़ा होता है।*

इन परिणामों की उपयोगिता प्रदर्शित करने हेतु अब हम कुछ उदाहरण देते हैं।

उदाहरण 10 : एक त्रिभुज के दो कोण समान हैं और तीसरा कोण उनमें से प्रत्येक से 30^0 अधिक है। त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना दो समान कोणों में से प्रत्येक x है।

तीसरा कोण $= x + 30^0$

अब, $x + x + x + 30^0 = 180^0$ (किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल)

या, $3x = 150^0$

या, $x = 50^0$

अतः त्रिभुज के कोण हैं : $50^0, 50^0$ और $(50^0 + 30^0)$

अर्थात्, $50^0, 50^0$ और 80^0 हैं।

उदाहरण 11 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल 360^0 होता है।

हल : हमें एक चतुर्भुज ABCD दिया है (आकृति 8.63)।

हमें सिद्ध करना है कि

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$$

B और D को मिलाइए जिससे कि दो (4-2) त्रिभुज ABD और BCD प्राप्त हों।

अब, $\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA = 180^0$

(ΔABD के कोणों का योगफल)........ (1)

और, $\angle CBD + \angle BCD + \angle CDB = 180^0$

(ΔBCD के कोणों का योगफल)........ (2)

B C A D

आकृति 8.63

(1) और (2) का योग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA + \angle CBD + \angle BCD + \angle CDB = 180^0 + 180^0$

या, $\angle BAD + (\angle ABD + \angle CBD) + \angle BCD + (\angle CDB + \angle BDA) = 360^0$

या, $\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^0$

अर्थात् $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

उदाहरण 12 : सिद्ध कीजिए कि किसी पंचभुज (pentagon) के (अंत:) कोणों का योगफल 540^0 होता है।

हल : हमें एक पंचभुज ABCDE (आकृति 8.64) दिया है। हमें सिद्ध करना है कि

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^0$$

A को C से और A को D से मिलाइए, जिससे कि हमें तीन (5-2) त्रिभुज प्राप्त हों।

अब, $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^0$

(ΔABC के कोणों का योगफल) (1)

$\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180^0$

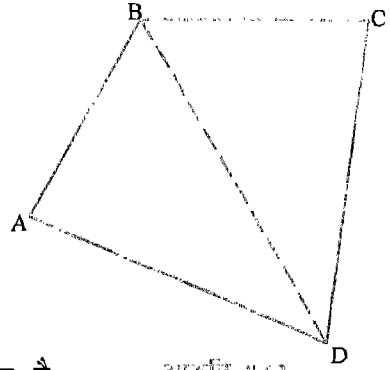
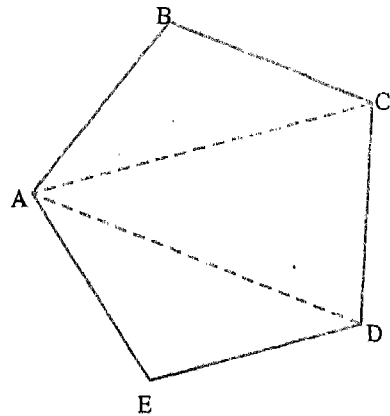
(ΔACD के कोणों का योगफल) (2)

और $\angle EAD + \angle ADE + \angle DEA = 180^0$

(ΔADE के कोणों का योगफल) (3)

B C A D E

आकृति 8.64

(1), (2) और (3) का योग करने पर, हमें प्राप्त होता हैं

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA + \angle CAD + \angle ACD + \angle ADC +$
$\angle EAD + \angle ADE + \angle DEA = 540^0$

या $(\angle BAC + \angle CAD + \angle EAD) + \angle ABC + (\angle BCA + \angle ACD) +$
$(\angle ADC + \angle ADE) + \angle DEA = 540^0$

अर्थात् $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^0$

टिप्पणी : 1. उदाहरण 11 में, हमने एक चतुर्भुज (अर्थात् 4 भुजाओं वाले बहुभुज) को *दो* (4–2) त्रिभुजों में विभाजित किया है और कोणों का योगफल 360^0 अर्थात् $(2 \times 4-4)$ समकोण प्राप्त किया। उदाहरण 12 में, हमने एक पंचभुज (अर्थात् 5 भुजाओं वाले बहुभुज) को *तीन* (5–2) त्रिभुजों में विभाजित किया है और योगफल 540^0 अर्थात् $(2 \times 5-4)$ समकोण प्राप्त किया। उसी प्रकार n भुजाओं वाले बहुभुज को $(n-2)$ त्रिभुजों में विभाजित कर, हम उसके सभी कोणों का योगफल $(2n-4)$ समकोण प्राप्त कर सकते हैं। अतः हम व्यापक रूप में कह सकते हैं कि n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी कोणों का योगफल $(2n-4)$ *समकोण* होता है।

2. अपनी पाठ्यपुस्तकों में हम अपना विचार विमर्श केवल अवमुख बहुभुजों (convex polygons) तक सीमित रखते हैं। याद कीजिए कि *किसी चतुर्भुज को अवमुख चतुर्भुज कहते है यदि चतुर्भुज के अभ्यंतर के कोई भी दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड पूर्णतः अभ्यंतर के अंदर स्थित है। दूसरे शब्दों में, किसी चतुर्भुज को अवमुख चतुर्भुज कहते हैं यदि चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा के लिए बहुभुज के अन्य सभी शीर्ष, उस भुजा को आविष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित हों।* यही परिभाषाएँ अवमुख बहुभुज पर लागू होती हैं।

3. *यदि एक बहुभुज की सभी भुजाएँ और उसके सभी कोण भी बराबर हों, तो ऐसे बहुभुज को सम बहुभुज* (regular polygon) *कहते हैं।*

उदाहरण 13 : आकृति 8.65 में, AB और CD दो समांतर रेखाएँ हैं। तिर्यक् रेखा EF के एक ओर स्थित अन्तः कोणों BMN और DNM के कोण समद्विभाजक बिन्दु P पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle MPN$ एक समकोण हैं।

हल : $\angle BMN + \angle DNM = 180^0$ (तिर्यक् रेखा के एक ओर के अंतः कोणों का योगफल)

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle BMN + \frac{1}{2}\angle DNM = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$$

क्योंकि $\angle PMN = \frac{1}{2}\angle BMN$

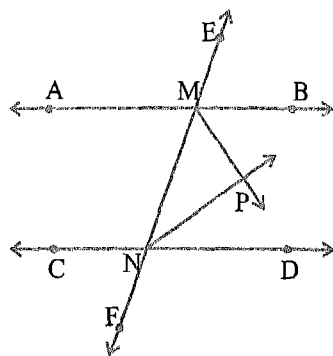
और $\angle PNM = \frac{1}{2}\angle DNM$

आकृति 8.65

अत: $\angle PMN + \angle PNM = 90°$

अब, $\angle PMN + \angle PNM + \angle MPN = 180°$
(ΔMPN के कोणों का योगफल)

या, $90° + \angle MPN = 180°$ ((1)से)

या, $\angle MPN = 180° - 90° = 90°$

उदाहरण 14 : त्रिभुज ABC की भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है, जैसा कि आकृति 8.66 में दर्शाया गया है। कोण A का कोण समद्विभाजक BC से L पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC + \angle ACD = 2\angle ALC$

हल : $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$ (बहिष्कोण दो अंत: अभिमुख कोणों के योगफल के बराबर होता है)

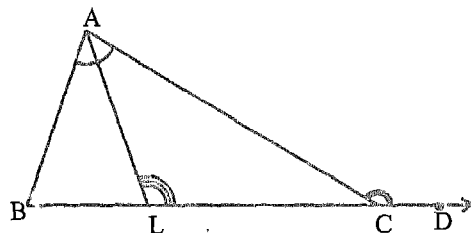
या, $\angle ACD = 2\angle LAB + \angle ABC$ (AL, $\angle A$ का कोण समद्विभाजक है।)

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ACD = \angle ABC + 2\angle LAB + \angle ABC$

अर्थात् $\angle ABC + \angle ACD = 2(\angle ABC + \angle LAB)$ .... (1)

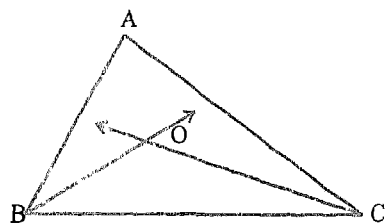
परंतु $\angle ABC + \angle LAB = \angle ALC$
(ΔALB का बहिष्कोण)

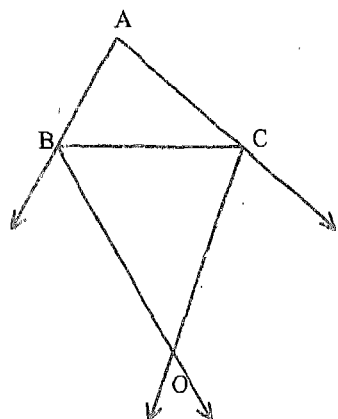
$\therefore$ (1) से हमें प्राप्त होता है

$\angle ABC + \angle ACD = 2\angle ALC$

आकृति 8.66

प्रश्नावली 8.3

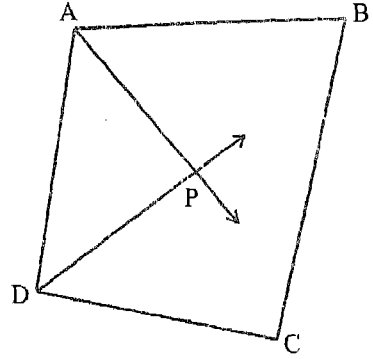
1. त्रिभुज का एक कोण 65^0 है। शेष बचे दो कोणों को ज्ञात कीजिए यदि उनका अंतर 25^0 हो।

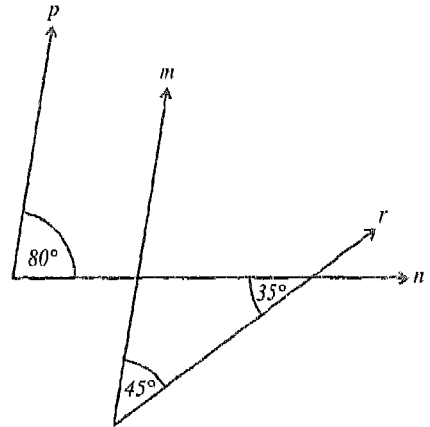
2. यदि एक त्रिभुज के कोण 2 : 3 : 4 के अनुपात में हों, तो तीनों कोण ज्ञात कीजिए।
3. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अन्य दो कोणों के योगफल के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह समकोण त्रिभुज है।
4. त्रिभुज का एक बहिष्कोण 115^0 का है और एक अन्त: अभिमुख कोण 35^0 का है। अन्य दो कोण ज्ञात कीजिए।
5. क्या एक त्रिभुज में निम्न हो सकते हैं :
   (i) दो समकोण?
   (ii) दो अधिक कोण?
   (iii) दो न्यून कोण?
   (iv) प्रत्येक कोण 60^0 से बड़ा?
   (v) प्रत्येक कोण 60^0 से छोटा?
   (vi) प्रत्येक कोण 60^0 का?
6. एक चतुर्भुज के तीन कोण 110^0, 40^0 एवं 50^0 हैं। चौथा कोण ज्ञात कीजिए।
7. आकृति 8.67 में, $\angle ABC$ और $\angle BCA$ के कोण समद्विभाजक बिंदु O पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि
   $\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$

आकृति 8.67

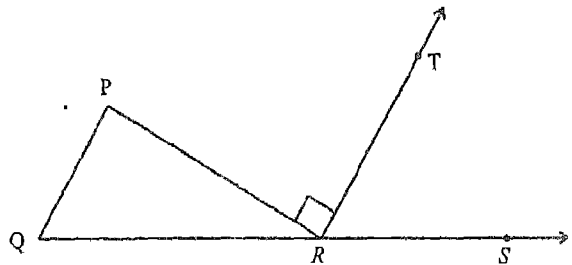
8. आकृति 8.68 में, त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और AC को बढ़ाने से निर्मित बहिष्कोणों के कोण समद्विभाजक बिंदु O पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि
   $\angle BOC = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A$

आकृति 8.68

9. ΔABC की भुजा BC दोनों दिशाओं में बढ़ाई जाती है। सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार निर्मित दो बहिष्कोणों का योगफल 180^0 से अधिक होगा।

10. आकृति 8.69 में, चतुर्भुज ABCD को दो आसन्न कोणों A और D के कोण समद्विभाजक AP और DP हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$2\angle APD = \angle B + \angle C$$

आकृति 8.69

11. आकृति 8.70 में, सिद्ध कीजिए $p \parallel m$

आकृति 8.70

12. आकृति 8.71 में, ΔPQR की भुजा QR को S तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle P : \angle Q : \angle R = 3 : 2 : 1$ और $RT \perp PR$ तो $\angle TRS$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.71

13. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक् रेखा प्रतिच्छेदित करती हो, तो सिद्ध कीजिए कि अंत:कोणों के कोण समद्विभाजक से एक आयत बनता है।

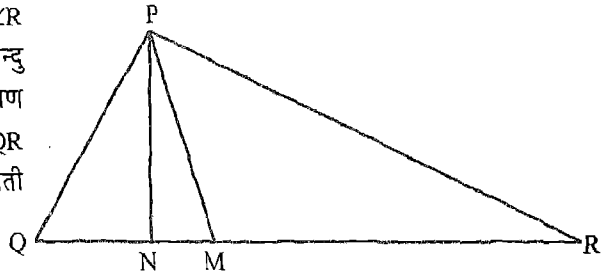
14. त्रिभुज DEF की भुजाओं EF, FD और DE को क्रमानुसार बढ़ाकर तीन बहिष्कोण क्रमशः DFP, EDQ और FER बनाए गए हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$\angle DFP + \angle EDQ + \angle FER = 360^0$$

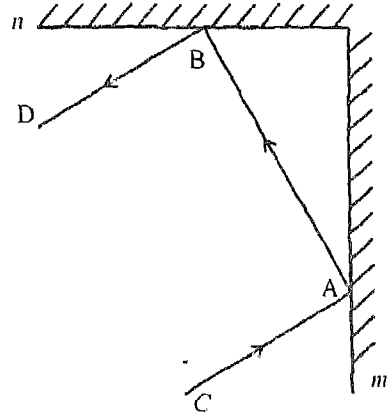
15. यदि दो कोणों में, एक की भुजाएँ दूसरे कोण की भुजाओं के क्रमशः लंब हों, तो सिद्ध कीजिए कि वे दोनों कोण या तो समान हैं या सम्पूरक।

    (संकेत : दो प्रकार की स्थितियों पर विचार कीजिए जैसा कि प्रश्नावली 8.2 के प्रश्नों 14 और 15 में किया है।)

16. आकृति 8.72 में, $\angle Q > \angle R$ तथा QR पर M एक ऐसा बिन्दु है कि PM $\angle QPR$ का कोण समद्विभाजक है। यदि P से QR पर लम्ब QR को N पर मिलाती हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\angle MPN = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle R)$$

आकृति 8.72

17. आकृति 8.73 में, m और n दो समतल दर्पण हैं जो परस्पर लम्ब हैं। दर्शाइए कि आपतित किरण CA परावर्तित किरण BD के समांतर है।

    (संकेत : A और B से m और n पर लम्ब खींचिए)

आकृति 8.73

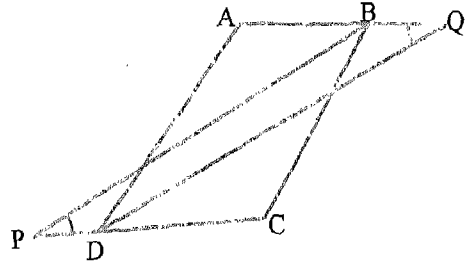
18. सिद्ध कीजिए कि एक षट्भुज के कोणों का योगफल 720^0 होता है।

19. ΔABC में $\angle B = 45^0, \angle C = 55^0$ और A का कोण समद्विभाजक BC से D बिंदु पर मिलता है। $\angle ADB$ और $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।

20. ABCDE एक सम पंचभुज है और $\angle BAE$ का कोण समद्विभाजक CD से M पर मिलता है। यदि $\angle BCD$ का कोण समद्विभाजक AM से P पर मिले, तब $\angle CPM$ ज्ञात कीजिए।

(संकेत : सम पंचभुज का प्रत्येक कोण $540^0/5 = 108^0$ होता है।)

21. आकृति 8.74 में, एक चतुर्भुज ABCD के $\angle B$ और $\angle D$ के कोण समद्विभाजक बढ़ाई हुई रेखाएँ CD और AB से क्रमश: P और Q पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$\angle P + \angle Q = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ADC)$$

आकृति 8.74

22. निम्नलिखित प्रकथनों में से कौन-से सत्य (T) हैं और कौन-से असत्य (F)?
    (i) त्रिभुज का एक बहिष्कोण अपने किसी एक अंत: अभिमुख कोण से छोटा होता है।
    (ii) त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180^0 होता है।
    (iii) चतुर्भुज के चारो कोणों का योगफल तीन समकोण होता है।
    (iv) त्रिभुज में दो समकोण हो सकते हैं।
    (v) त्रिभुज में दो (न्यून) कोण हो सकते है।
    (vi) त्रिभुज में दो अधिक कोण हो सकते है।
    (vii) त्रिभुज का एक बहिष्कोण दो अंत: अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

23. निम्न कथनों का सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिये :
    (i) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग ―――――― होता है।
    (ii) किसी त्रिभुज का एक बहिष्कोण दो ―――――― अभिमुख कोणों के बराबर होता है।
    (iii) किसी त्रिभुज का एक बहिष्कोण अपने किसी एक अन्त: अभिमुख कोण से हमेशा ―――――― होता है।
    (iv) किसी त्रिभुज में ―――――― से अधिक समकोण नहीं हो सकते।
    (v) किसी त्रिभुज में ―――――― से अधिक अधिककोण नहीं हो सकते।
    (vi) चतुर्भुज के चारों कोणों का योग ―――――― होता है।

अध्याय 9

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

9.1 भूमिका

अपने प्रतिदिन के जीवन में, हम भिन्न आकारों और मापों (साइज़) (shapes and sizes) की बहुत सी वस्तुएँ देखते हैं। उन में से कुछ समान आकार व भिन्न साइज़ों की हैं तथा कुछ समान आकार और समान साइज़ की होती हैं। उदाहरण के लिए, एक आकृति व उसकी कार्बन प्रतिलिपि अवश्य ही समान आकार और समान साइज़ की होती हैं। इसी प्रकार से, एक ही लेख की दो फोटोकापी जो तुल्य साइज़ की बनाई गई हों, समान आकार और समान साइज़ की आकृतियाँ हैं। दो वस्तुएँ (मान लो खिलोने) जो कि कारखाने में तुल्य विवरण से बनाए गए हों, दुनिया के *तुल्य साइज़* के नक्शे भी समान आकार में और *साइज़ में समान* हों, *सर्वांगसम आकृतियाँ* कहलाती हैं और दो आकृतियों के सर्वांगसम होने के संबंध को *सर्वांगसमता* कहते हैं। समतल ज्यामिति में सर्वांगसमता एक महत्वपूर्ण संकल्पना है। समतल आकृतियों के लिए हम सर्वांगसमता की संकल्पना को अधिक निश्चित अर्थ दे सकते हैं। मान लो हम दो एक-रुपये के सिक्के (या दो दस-रुपये वाले नोट), जो एक ही समय प्रचारित किये गए हों, लेते हैं। स्पष्टत: हमारी सर्वांगसमता की अवधारणा के अनुसार वे परस्पर सर्वांगसम है।

अब मान लो हम एक सिक्के (या नोट) को दूसरे पर रखते हैं। हम देखेंगे कि हम एक सिक्के (या नोट) को दूसरे के पूर्णत: अनुरूप पायेंगे अर्थात् एक सिक्का (या नोट) दूसरे सिक्के (या नोट) को पूर्णरूप से ठीक-ठीक ढक लेता है। अत: हम कह सकते हैं कि *किसी समतल में दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि हम एक आकृति को दूसरी पर इस प्रकार अध्यारोपित (superposition) कर सकते हैं कि वे एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लें।* याद कीजिए कि अध्यारोपण में आकृतियों का बंकन (bending), व्यावर्तन (twisting) या तनन (streching) की अनुमति नहीं दी जाती

है। अपनी पिछली कक्षाओं में हमने अध्यारोपण के द्वारा निम्न परिणामों को पहले ही सत्यापित कर लिया है:

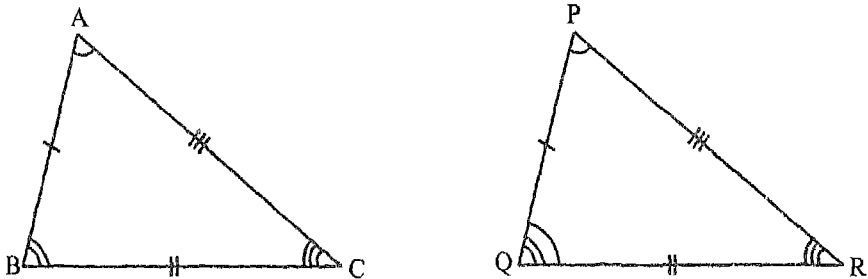
(i) दो रेखा-खण्ड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी लम्बाई बराबर हों।

(ii) दो कोण सर्वांगसम होते हैं, यदि उनके माप बराबर हों।

(iii) दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक की सभी भुजाएँ और सभी कोण दूसरे की संगत भुजाओं और कोणों के समान हों अर्थात् एक त्रिभुज के छ: अवयव, तीन भुजाएं और तीन कोण, दूसरे त्रिभुज के छ: अवयवों के क्रमश: बराबर हों। उदाहरण के लिए यदि ABC और PQR ऐसे दो त्रिभुज हैं कि

$AB = PQ, BC = QR, CA = RP,$

$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ और

$\angle C = \angle R$ (आकृति 9.1),

आकृति 9.1

तब हम कहते हैं कि ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम हैं और संकेत रूप में लिखते हैं : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$। यहाँ A, P के संगत है, B, Q के संगत है एवं C, R के संगत है। इस प्रकार शीर्षों की छ: भिन्न संगतियों में से त्रिभुज ΔABC और ΔPQR केवल संगत $ABC \leftrightarrow PQR$ के अनुरूप सर्वांगसम होते हैं, और इसलिये हम ने लिखा है कि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$। उपरोक्त संगति को हम $\Delta BCA \cong \Delta QRP$ या $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ भी लिख सकते हैं। परंतु $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ या $\Delta BCA \cong \Delta PQR$ आदि लिखना गलत होगा (क्यों?) इस प्रकार यह बहुत महत्वपूर्ण है कि दो त्रिभुजों के बीच सर्वांसमता सम्बन्ध संकेत रूप में उचित संगति (या अनुरूपता) में लिखा जाये

और उनके संगत (अनुरूप) अवयव सही रूप में पहचाने जायें। उदाहरण के लिए, यदि $\Delta ABC \equiv \Delta QRP$ तब संगत अवयव हैं AB और QR, BC और RP, CA और PQ, $\angle A$ और $\angle Q$, $\angle B$ और $\angle R$ तथा $\angle C$ और $\angle P$। हम, "सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग" को संक्षेप रूप में 'स.वि.स.भा.' (CPCT) लिख सकते हैं।

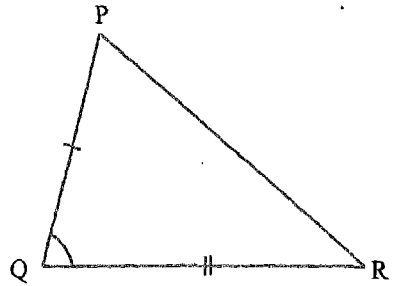
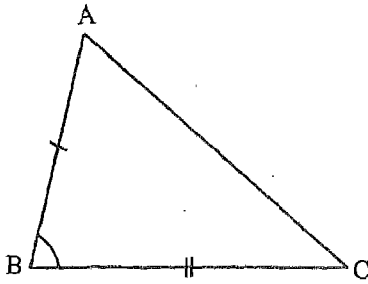
9.2 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की विभिन्न कसौटियाँ

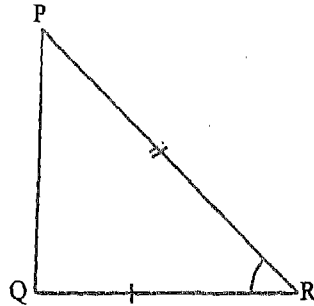
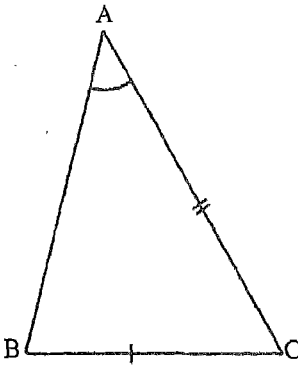
हमने देखा है कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के सभी छ: अवयव दूसरे त्रिभुज के संगत छ: अवयवों के समान होते हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है। दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता स्थापित करने के लिए क्या यह आवश्यक है कि हमें ज्ञात हो कि एक त्रिभुज के छ: अवयव दूसरे त्रिभुज के संगत छ: अवयवों के समान हैं? क्या यह संभव है कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता निर्धारित हो जाये यद्यपि हमें छ: से कम अवयवों की समानता दी गई हो। इसका जवाब "हाँ" में है। अपनी पिछली कक्षाओं में हमने अध्यारोपण के द्वारा सीखा है कि कुछ स्थितियों में दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता स्थापित की जा सकती है यद्यपि हमें केवल कुछ विशेष संगत भागों के तीन युग्मों की समानता दी गई हो। याद कीजिए कि, सामान्यत: इस प्रकार की तीन स्थितियाँ थीं। प्रत्येक स्थिति में हम तीन अवयवों का भिन्न संचय लेते हैं। हम इन स्थितियों को एक एक करके लेते हैं।

गुणधर्म 9.1 : *यदि एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

क्योंकि यह अभिगृहीत, त्रिभुज की दो भुजाओं और उनका अंतर्गत कोण से संबंधित है, इसलिए इसे *(भुजा-कोण-भुजा)* कसौटी कहते हैं। इसे भु-को-भु सर्वांगसमता अभिगृहीत भी कहते हैं।

इस प्रकार उदाहरण के लिए, आकृति 9.2 में, $AB = PQ, BC = QR$ और $\angle B = \angle Q$, तब भु-को-भु, कसौटी से, $\Delta ABC \equiv \angle PQR$। इस का अर्थ है कि दोनों त्रिभुज के अन्य संगत अवयव अपने आप बराबर हैं और इसलिए $CA = RP$, $\angle A = \angle P$ तथा $\angle C = \angle R$ ।

टिप्पणी : भु-को-भु सर्वांगसमता कसौटी के संबंध में एक महत्वपूर्ण बात यह है कि *अंतर्गत कोण* की समानता आवश्यक है। मान लीजिए एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और

आकृति 9.2

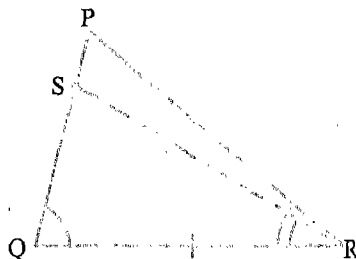
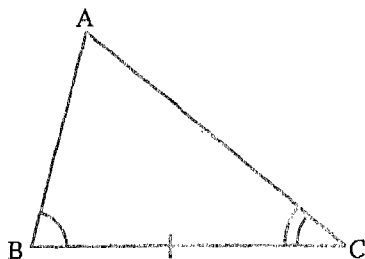
एक कोण *(जो भुजाओं के अंतर्गत न हो)* दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर हों (आकृति 9.3) जिसमें $BC = QR$, $CA = RP$ और $\angle A = \angle R$।

आकृति 9.3

निःसन्देह दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं। इस प्रकार सामान्यतः त्रिभुज की सर्वांगसमता के लिए भु-भु-को एक कसौटी नहीं है। अब हम दूसरी कसौटी पर निम्नानुसार विचार करते हैं।

प्रमेय 9.1 : *यदि एक त्रिभुज के कोई दो कोण और उन की अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

ध्यान दीजिए कि पिछली कक्षाओं में हमने इस परिणाम को रचना और अध्यारोपण के द्वारा पहले ही सत्यापित कर लिया है। फिर भी हम इस परिणाम को निम्नानुसार सिद्ध भी कर सकते हैं :

दिया है : त्रिभुज ABC और PQR में,

$\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ और $BC = QR$ (आकृति 9.4)

आकृति 9.4

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

उपपत्ति : तीन स्थितियाँ संभावित हैं:

(i) $AB = PQ$ (ii) $AB < PQ$ (iii) $AB > PQ$

स्थिति (i) : यदि $AB = PQ$, तो भु-को-भु अभिगृहीत द्वारा स्पष्टतः $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

स्थिति (ii) : यदि $AB < PQ$ तो भुजा PQ पर हम ऐसा बिन्दु S ले सकते हैं कि $AB = SQ$ । अब RS को मिलाइए जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। अब, ΔABC और ΔSQR में

$AB = SQ$ (माना हुआ है)

$BC = QR$ (दिया है), और

$\angle B = \angle Q$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta SQR$ (भु-को-भु अभिगृहीत से)

अतः $\angle C = \angle SRQ$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) .... (1)

परन्तु $\angle C = \angle R$ (अर्थात् $\angle QRP$) (दिया है)

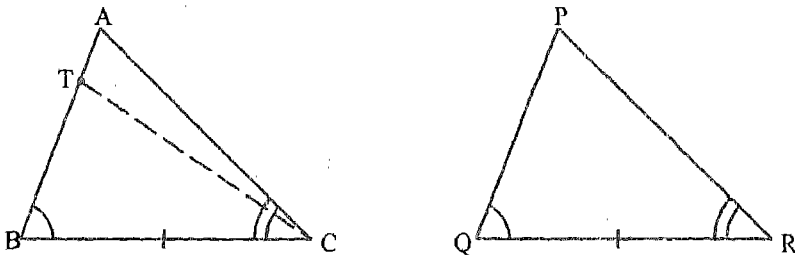
$\therefore$ (1) से $\angle SRQ = \angle PRQ$,

पर यह, तब तक असम्भव है जब तक RS, RP के साथ संपाती न हो जाये अर्थात S, P के साथ संपाती है।

$\therefore$ AB = PQ

अतः $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, (भु-को-भु अभिगृहीत से)

स्थिति (iii) : यदि AB > PQ तब भुजा AB पर हम ऐसा बिंदु T ले सकते हैं कि TB = PQ (आकृति 9.5) और स्थिति (ii) के समान दर्शा सकते हैं कि T, A से संपाती होना चाहिए, अर्थात् AB = PQ और $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

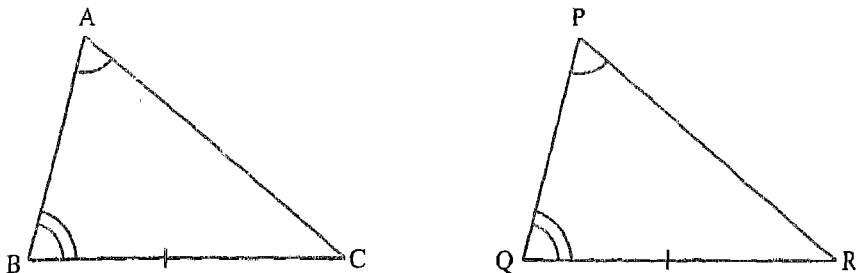
इसलिए, सभी तीनों स्थितियों में, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

आकृति 9.5

इस पर ध्यान दें कि उपरोक्त परिणाम सिद्ध करने में हम ने तीनों संभावनाओं को निश्शेष कर दिया। ऐसी उपपत्ति को *निश्शेषता द्वारा उपपत्ति* (proof by exhaustion) कहते हैं।

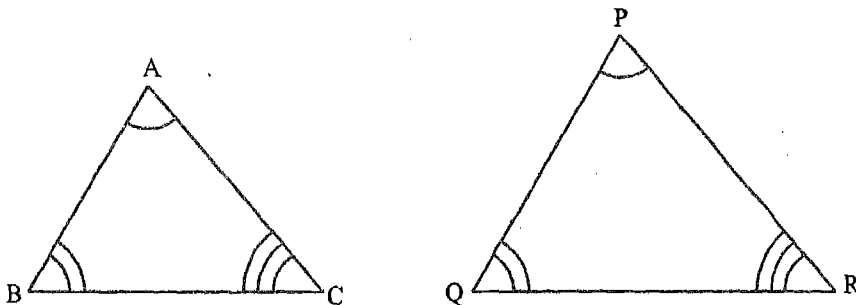
स्पष्ट कारणों से उपरोक्त परिणाम को त्रिभुजों की सर्वांगसमता की *को-भु-को (कोण-भुजा-कोण) कसौटी* कहते हैं।

टिप्पणी : क्योंकि किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180^0 होता है, इसलिए, यदि एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों, तब पहले त्रिभुज का तीसरा कोण दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोण के बराबर अपने आप हो जायेगा। इस गुणधर्म के आधार पर, हम उपरोक्त प्रमेय के उपप्रमेय का निम्नलिखित कथन दे सकते है।

उपप्रमेय : *यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज की दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

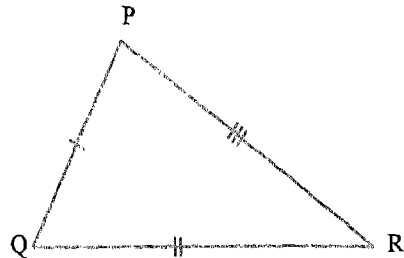
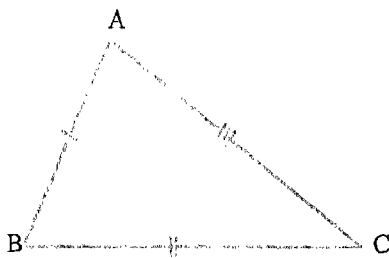
उदाहरण के लिए, आकृति 9.6 के ΔABC और ΔPQR में, मान लो $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ और $BC = QR$

आकृति 9.6

स्पष्ट है, $\angle C = \angle R$ और इसलिए $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$ (को-भु-को से)। उपरोक्त उपप्रमेय को कभी-कभी दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की *को-को-भु (कोण-कोण-भुजा) कसौटी* कहते हैं।

यहाँ, इस पर भी ध्यान दीजिए कि यदि एक त्रिभुज के सभी तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर हों, तो यह आवश्यक नहीं है कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों। उदाहरण के लिए, आकृति 9.7 में, त्रिभुजों ABC और PQR में $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ यह स्पष्ट कि त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

आकृति 9.7

अत: त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए *को-को-को कोई कसौटी नहीं है।* अब हम दो त्रिभुजों की तीनों भुजाओं से सम्बद्ध परिणाम का निम्न कथन देते हैं:

गुणधर्म 9.2 : *यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, दूसरे त्रिभुज की तीन भुजाओं के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।*

इस प्रकार यदि ΔABC और ΔPQR में, $AB = PQ, BC = QR$ और $CA = RP$ तब $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (आकृति 9.8)

आकृति 9.8

दोनों त्रिभुजों की रचना करके और एक त्रिभुज को दूसरे पर अध्यारोपण करके इस परिणाम को सुगमता से सत्यापित किया जा सकता है, जैसा कि पिछली कक्षाओं में किया है। स्पष्ट कारणों से, इस को दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की *भु-भु-भु (भुजा-भुजा-भुजा) कसौटी* कहते हैं।

अब हम कुछ उदाहरणों से इन कसौटियों कि उपयोगिता प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 1 : आकृति 9.9 में ΔABC की भुजाएँ BA और CA क्रमशः बिंदुओं D और E तक इस प्रकार बढ़ाई गई हैं कि $BA = DA$ और $CA = EA$ है। सिद्ध कीजिए कि $BC \| ED$

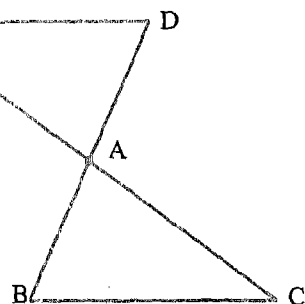
हल : ΔABC और ΔADE में

$BA = DA$ (दिया है)

$CA = EA$ (दिया है)

$\angle BAC = \angle DAE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ (भु-को-भु कसौटी से)

$\therefore$ $\angle B = \angle D$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

आकृति 9.9

इस प्रकार, तिर्यक् BD, रेखाओं BC और DE के साथ समान एकान्तर कोण बनाती है

$\therefore$ $BC \| ED$

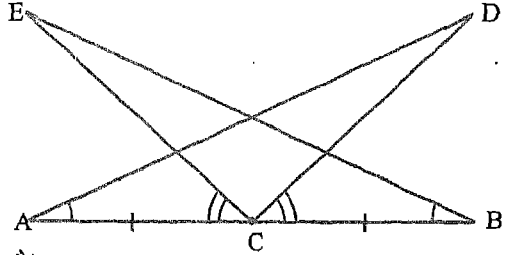
उदाहरण 2 : आकृति 9.10 में, C, AB का मध्य-बिंदु है,

$\angle BAD = \angle CBE$ और

$\angle ECA = \angle DCB$

सिद्ध कीजिए (i) ΔDAC और ΔEBC सर्वांगसम हैं और (ii) $DA = EB$

आकृति 9.10

हल : C, AB का मध्य-बिंदु है (दिया है)

$\therefore$ $AC = BC$ (1)

$\angle ECA = \angle DCB$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle ECA + \angle DCE = \angle DCB + \angle DCE$

अर्थात् $\angle DCA = \angle ECB$ (2)

अब, ΔDAC और ΔEBC में

$\angle DCA = \angle ECB$ [(2) से]

$\angle DAC = \angle EBC$ (दिया है)

$AC = BC$ [(1) से]

$\therefore$ $\Delta DAC \cong \Delta EBC$ (को-भु-को से)

और इसलिए $DA = EB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

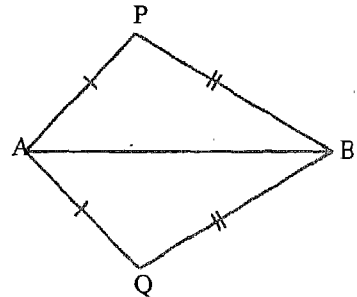
उदाहरण 3 : आकृति 9.11 में, $AP = AQ$ और $BP = BQ$ सिद्ध कीजिए कि AB, $\angle PAQ$ और $\angle PBQ$ के कोणों का समद्विभाजक है।

आकृति 9.11

हल : ΔPAB और ΔQAB में,

$AP = AQ$ (दिया है)

$BP = BQ$ (दिया है)

और $AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः $\Delta PAB \cong \Delta QAB$ (भु-भु-भु कसौटी से)

$\therefore$ $\angle PAB = \angle QAB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

और $\angle PBA = \angle QBA$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

$\therefore$ AB, $\angle PAQ$ और $\angle PBQ$ के कोणों का समद्विभाजक है।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण के मध्य-बिंदु को समकोण के शीर्ष से जोड़ने वाला रेखा खण्ड कर्ण का आधा होता है।

हल : हमें दिया है कि ΔABC में,

$\angle C = 90^0$ और M कर्ण AB का मध्य-बिंदु है अर्थात् $AM = BM$ (आकृति 9.12)

हमें सिद्ध करना है कि $CM = \frac{1}{2}AB$

हम CM को बिंदु D तक बढ़ाते है।

जिससे कि $CM = DM$। B और D को मिलाइए।

आकृति 9.12

अब ΔAMC और ΔBMD में

$AM = BM$ (दिया है)

$CM = DM$ (रचना से)

और $\angle AMC = \angle BMD$ (शीर्षभिमुख कोण)

इसलिए, $\Delta AMC \cong \Delta BMD$ (भु-को-भु)

परिणामतः $AC = BD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) . . . (1)

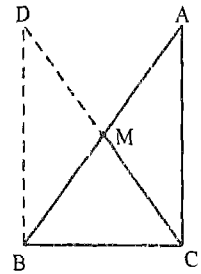
और $\angle CAM = \angle DBM$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) . . . (2)

(2) के दोंनों पक्षों में $\angle MBC$ जोड़ने पर

$$\angle CAM + \angle MBC = \angle DBM + \angle MBC$$

अर्थात् $\angle CAM + \angle CBA = \angle DBC$ . . . (3)

परंतु $\angle CAM + \angle CBA = 90^0$ (क्योंकि ΔABC के कोणों का योगफल 180^0 और $\angle C = 90^0$)

$\therefore$ $\angle DBC = 90^0$ [(3) से]

अब, ΔDBC और ΔABC में

$BD = AC$ [(1) से]

$\angle DBC = \angle ACB$ (दोनों 90^0)

और $BC = CB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore$ $\Delta DBC \cong \Delta ACB$ (भु-को-भु)

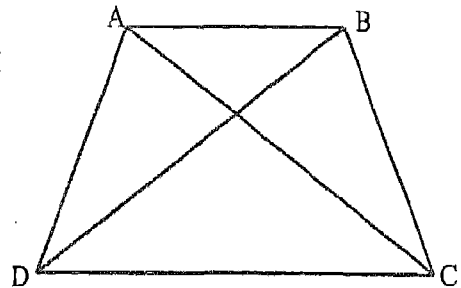
परिणामत: $DC = AB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

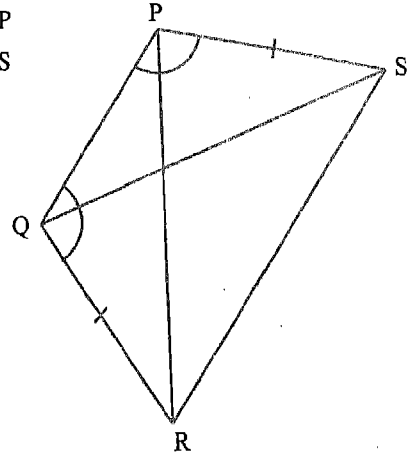
अर्थात् $2CM = AB$

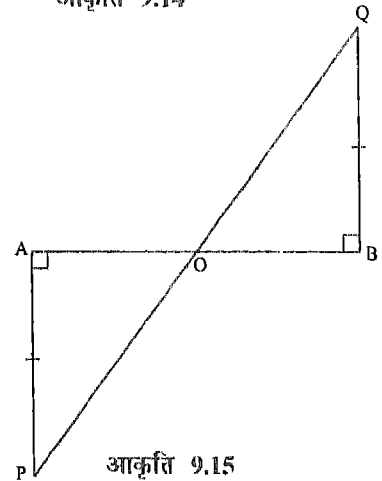
या $CM = \frac{1}{2} AB$

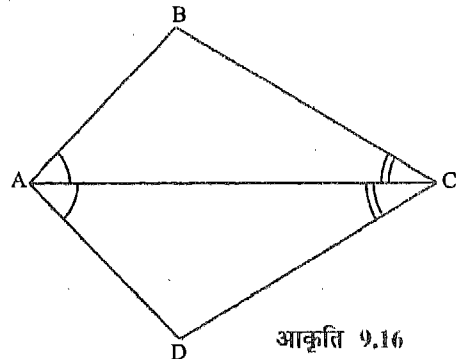
टिप्पणी : दूसरे उदाहरणों के समान, इस परिणाम को भी विभिन्न विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। आप वैकल्पिक उपपत्ति को बाद में उचित स्थान पर पढ़ेंगे। इस पर भी ध्यान दिया जाये कि कभी-कभी दूसरे परिणामों को सिद्ध करने के लिये इस परिणाम को प्रमेय के रूप में उपयोग किया जाता है।

प्रश्नावली 9.1

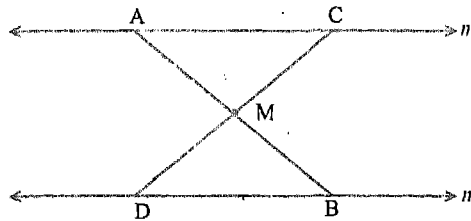
1. आकृति 9.13 में, $AD = BC$ और $BD = CA$ सिद्ध कीजिए कि $\angle ADB = \angle BCA$ और $\angle DAB = \angle CBA$

आकृति 9.13

2. आकृति 9.14 में, $PS = QR$ और $\angle SPQ = \angle RQP$ सिद्ध कीजिए कि $PR = QS$ और $\angle QPR = \angle PQS$

आकृति 9.14

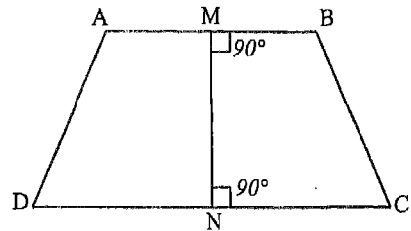
3. आकृति 9.15 में, रेखाखण्ड AB पर AP और BQ लम्ब हैं और $AP = BQ$। सिद्ध कीजिए कि O रेखा खण्डों AB और PQ का मध्यबिन्दु है।

आकृति 9.15

4. आकृति 9.16 में चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC कोणों A और C को समद्विभजित करता है। सिद्ध कीजिए कि $AB = AD$ और $CB = CD$

आकृति 9.16

5. AB एक रेखा-खण्ड है। AB के विपरीत पक्षों में AX और BY समान लम्बाई के ऐसे दो रेखा-खण्ड खींचे गए हैं कि $AX \parallel BY$ है। यदि रेखा खण्ड AB और XY परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि (i) $\Delta APX \cong \Delta BPY$ (ii) AB और XY, P बिन्दु पर परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

6. आकृति 9.17 में $m \parallel n$, A और B क्रमशः रेखाओं m और n पर कोई बिंदु हैं, तथा M रेखा खण्ड AB का मध्य बिंदु है। यदि CD कोई अन्य रेखा-खण्ड हो, जिसके सिरे C और D क्रमशः रेखाओं m और n पर स्थित हों, तो सिद्ध कीजिए कि M रेखा-खण्ड CD का भी मध्य-बिंदु होगा।

आकृति 9.17

7. आकृति 9.18 में चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और DC के मध्य-बिंदुओं M और N को जोड़ने वाला रेखा-खण्ड दोनों भुजाओं पर लम्ब है। सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज की अन्य भुजाएँ बराबर हैं।

[संकेत : M और D तथा M और C को मिलाइए]

आकृति 9.18

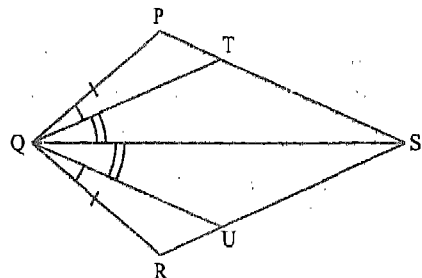
8. आकृति 9.19 में, PQRS एक चतुर्भुज है और PS तथा RS पर क्रमशः T और U ऐसे बिंदु हैं कि

$$PQ = RQ,$$

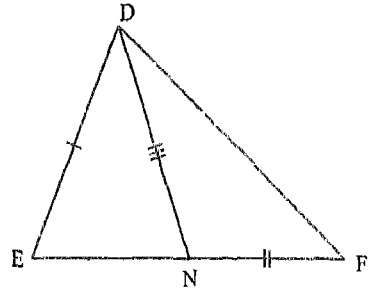
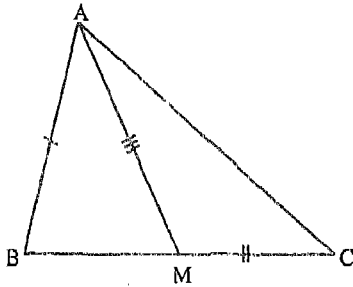
$$\angle PQT = \angle RQU$$

और $\angle TQS = \angle UQS$ है।

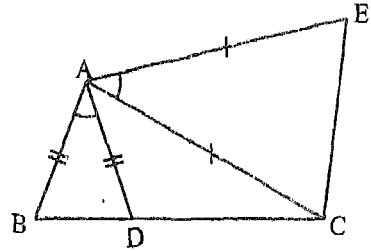
सिद्ध कीजिए कि $QT = QU$

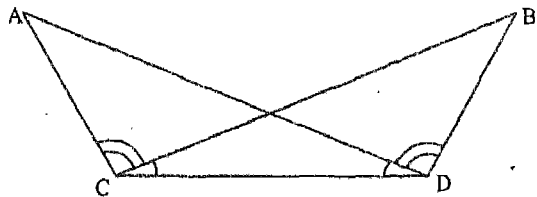
[संकेत : सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \cong \Delta RQS$]

आकृति 9.19

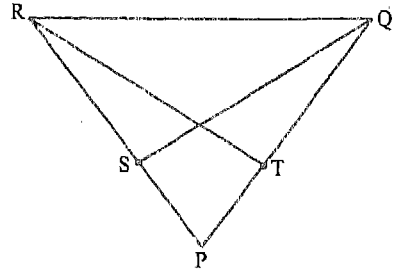
9. आकृति 9.20 में, ΔABC की दो भुजाएँ AB तथा BC और माध्यिका AM क्रमशः ΔDEF की भुजाओं DE तथा EF और माध्यिका DN के बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

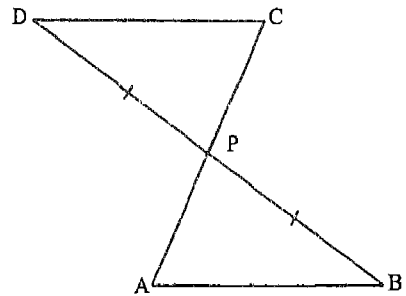
[**संकेत** : BM = EN (बराबर भुजाओं के आधे), का उपयोग करके सिद्ध कीजिए $\Delta ABM \cong \Delta DEN$ आदि]

आकृति 9.20

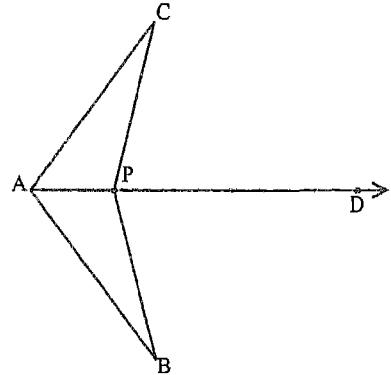
10. दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज की एक भुजा और एक न्यून कोण दूसरे त्रिभुज की एक भुजा तथा संगत न्यून कोण के बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

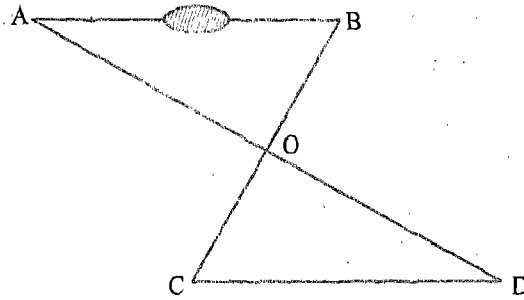
11. आकृति 9.21 में, AC = AE, AB = AD और $\angle BAD = \angle EAC$, सिद्ध कीजिए कि BC = DE

आकृति 9.21

12. आकृति 9.22 में, $\angle BCD = \angle ADC$ और $\angle ACB = \angle BDA$, सिद्ध कीजिए कि AD = BC और $\angle A = \angle B$

आकृति 9.22

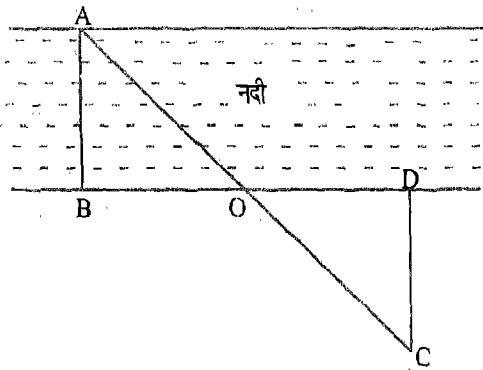
13. आकृति 9.23 में, $RS = QT$ और $QS = RT$, सिद्ध कीजिए कि $PQ = PR$

आकृति 9.23

14. आकृति 9.24 में, यदि $AB \parallel DC$ और P, BD का मध्य-बिंदु है, तो सिद्ध कीजिए कि P, AC का भी मध्य-बिंदु है।

आकृति 9.24

15. आकृति 9.25 में, $\angle CPD = \angle BPD$ और AD, $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta CAP \cong \Delta BAP$ और इसलिए $CP = BP$

आकृति 9.25

16. हमीदा दो वस्तुओं A और B के बीच की दूरी ज्ञात करना चाहती है, परंतु इन दोनों वस्तुओं के बीच एक रुकावट है (आकृति 9.26), जिसके कारण वह यह दूरी सीधे नाप कर ज्ञात नहीं कर सकती है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए वह एक चातुर्य विधि का प्रयोग करती है। पहले वह एक सुविधाजनक बिन्दु O ऐसा लेती है, जहाँ से A

आकृति 9.26

और B दोनों दिखाई दें और वहाँ एक खंभा स्थापित करती है। तब रेखा AO की सीध में एक बिंदु D पर वह दूसरा खंभा इस प्रकार स्थापित करती है कि AO = DO। इसी प्रकार, वह तीसरा खंभा, रेखा BO की सीध में, बिंदु C पर स्थापित करती है, जिससे कि BO = CO। तब वह CD को नापती है और देखती है कि CD = 540 सेमी। सिद्ध कीजिए कि A और B के बीच की दूरी भी 540 से मी है।

17. आकृति 9.27 से व्याख्या कीजिए कि नदी को पार किए बिना, कोई उसकी चौड़ाई कैसे ज्ञात कर सकता है।

आकृति 9.27

18. निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य (T) हैं और कौन असत्य (F) हैं?

(i) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

(ii) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(iii) यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(iv) यदि $\Delta ABC \cong \Delta PRQ$, तब $AB = PQ$

(v) यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और एक भुजा के बराबर हों, तब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(vi) यदि $\Delta DEF \cong \Delta RPQ$, तब $\angle D = \angle Q$

(vii) यदि $\Delta PQR \cong \Delta CAB$, तब $PQ = CA$

19. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक कथन सत्य हो :

(i) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और ______ कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(ii) यदि एक त्रिभुज की ______ भुजाएँ, क्रमशः दूसरे त्रिभुज की तीन भुजाओं के बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(iii) यदि ΔABC और ΔPQR में, $AB = QR, \angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$, तब $\Delta ABC \cong \Delta$ ______

(iv) यदि ΔABC और ΔDEF में, $AB = DF, BC = DE$ और $\angle B = \angle D$, तब $\Delta ABC \cong \Delta$ ______

(v) यदि ΔPQR और ΔDEF में, $PR = EF, QR = DE$ और $PQ = FD$, तब $\Delta PQR \cong \Delta$ ______

(vi) यदि M, समकोण ΔABC के कर्ण AC का मध्य-बिंदु है। तो $BM = \frac{1}{2}$ ______

9.3 समद्विबाहु त्रिभुजों के कुछ गुणधर्म

याद कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज एक त्रिभुज है जिसकी दो भुजाएँ समान हैं आप को यह भी ध्यान होगा कि पिछली कक्षाओं में हम ने समद्विबाहु त्रिभुजों से संबंधित कुछ परिणामों का अध्ययन किया था। निम्नलिखित परिणाम भी उन्हीं में से एक है :

प्रमेय 9.2 : *त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

पिछली कक्षाओं में इस परिणाम को कागज़ मोड़ने और मापन आदि क्रियाओं के द्वारा समझाया गया था। हम इस परिणाम को निम्न रूप से सिद्ध कर सकते हैं :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ (आकृति 9.28)

सिद्ध करना है : $\angle B = \angle C$

रचना : BC पर ऐसा बिंदु D लीजिए कि AD, $\angle BAC$ को समद्विभाजित करे।

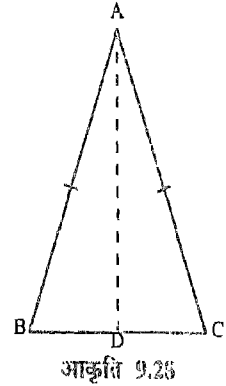
आकृति 9.28

उपपत्ति : ΔABD और ΔACD में

$AB = AC$ (दिया है.)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

और $AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

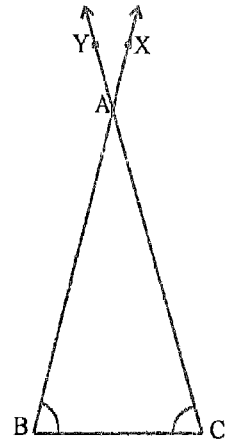
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (भु-को-भु से)

इसलिए $\angle B = \angle C$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

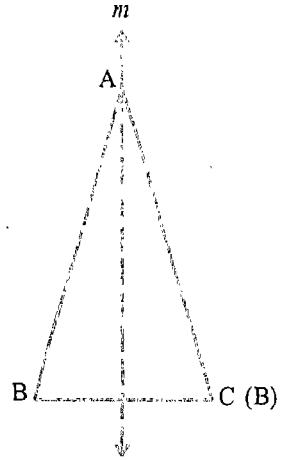
टिप्पणी : इस पर ध्यान दें कि समद्विबाहु त्रिभुज के इस परिणाम का उपयोग करके हम तर्कसंगत विवेचना द्वारा भुजा-भुजा-भुजा कसौटी को सिद्ध कर सकते हैं, जिसे हमने गुणधर्म 9.2 में सत्य मान लिया है।

अब हम उपरोक्त परिणाम के विलोम पर विचार करते हैं।

गुणधर्म 9.3: *त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होती हैं।*

इस परिणाम को हम निम्नानुसार सत्यापित कर सकते हैं :

मान लो हम एक रेखाखण्ड BC खींचते हैं और B तथा C पर बराबर कोण क्रमशः XBC और YCB की रचना करते हैं। BX और CY का प्रतिच्छेद बिंदु A है। इस प्रकार हमें ΔABC प्राप्त होता है, जिसमें $\angle B = \angle C$ (आकृति 9.29) अब हम A से होकर जाने वाली रेखा m के अनु कागज़ को इस प्रकार मोड़ते हैं कि BC स्वयं को ढक लेती है। हम देखेंगे कि B, C पर पड़ता है

आकृति 9.29

(आकृति 9.30)। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि AC = AB, अर्थात् बराबर कोणों कि सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं। इस तथ्य, कि AB = AC को मापन द्वारा भी सत्यापित किया जा सकता है। इस परिणाम को हम प्रमेय 9.2 की विधि की तरह भी सिद्ध कर सकते हैं।

आकृति 9.30

9.4 दो समकोण त्रिभुजों की सर्वांगसमता

परिच्छेद 9.2 में हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए तीन कसौटियों का अध्ययन किया है। अब हम दो समकोण त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटी पर निम्नानुसार विचार करते हैं :

प्रमेय 9.3 : *दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर होते हैं। (इस प्रमेय त्रिभुजों की सर्वांगसमता की 'समकोण कर्ण भुजा' (RHS) कसौटी कहते हैं।* याद कीजिए कि पिछली कक्षाओं में हमने रचना एवं अध्यारोपण के द्वारा इस परिणाम को सत्यापित किया है। अब हम समद्विबाहु त्रिभुजों के उपरोक्त गुणधर्मों का उपयोग करके इस परिणाम को सिद्ध करेंगे।

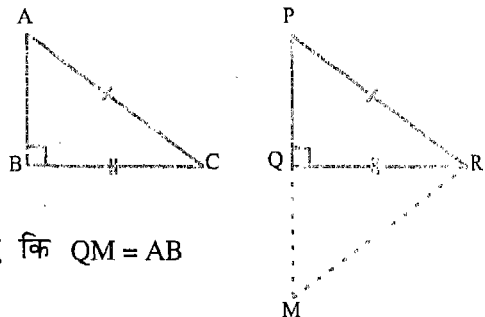
दिया है : दो त्रिभुज ABC और PQR,

$\angle B = \angle Q = 90^0$

कर्ण AC = कर्ण PR

भुजा BC = भुजा QR (आकृति 9.31)

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

रचना : PQ को M तक इतना बढ़ाइए कि QM = AB M एवं R को मिलाइए।

आकृति 9.31

उपपत्ति : ΔABC और ΔMQR में,

AB = MQ (रचना से)

BC = QR (दिया है)

और $\angle B = \angle MQR$ (प्रत्येक 90^0 का)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta MQR$ (भु-को-भु से)

$\therefore$ $\angle A = \angle M$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (1)

और $AC = MR$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (2)

परंतु $AC = PR$ (दिया है)

इसलिए, (2) से, हमें प्राप्त होता है

$MR = PR$

$\therefore$ $\angle P = \angle M$ (ΔMPR की बराबर भुजाओं के सम्मुख के सम्मुख कोण) (3)

इसलिए, (1) और (3) से

$\angle A = \angle P$ (4)

अब, ΔABC और ΔPQR में,

$\angle A = \angle P$ [(4) से]

$\angle B = \angle Q$ (दिया है प्रत्येक 90^0)

$\therefore$ $\angle C = \angle R$ (तीनों कोणों का योग 180^0 है, अतः तीसरे कोण बराबर होना चाहिए) (5)

पुनः ΔABC और ΔPQR में,

$BC = QR$ (दिया है)

$AC = PR$ (दिया है)

और $\angle C = \angle R$ [(5) से]

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (भु-को-भु कसौटी से)

स्पष्ट कारणों से, उपरोक्त परिणाम *समकोण-कर्ण-भुजा (स-क-भु) समकोण त्रिभुजों की सर्वांगसमता कसौटी* कहलायेगा।

टिप्पणी : $\angle C = \angle R$ प्राप्त करने के पश्चात् [जैसा कि उपरोक्त (5) में] हम यह भी कह सकते हैं

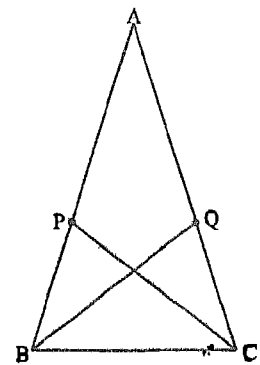
$\angle B = \angle Q$ (दिया है)

$\angle C = \angle R$ [(5) से]

और $BC = QR$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (को-भु-को कसौटी से)

अब हम कुछ उदाहरणों को लेकर इन परिणामों की उपयोगिता प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 5 : आकृति 9.32 में समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं AB और AC पर ऐसे दो बिंदु P और Q हैं कि $AP = AQ$ सिद्ध कीजिए कि $PC = QB$

आकृति 9.32

हल : $AB = AC$ (दिया है) (1)

$\therefore$ $\angle PBC = \angle QCB$ (2)
(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

$AP = AQ$ (दिया है) (3)

$\therefore$ $AB - AP = AC - AQ$ [(1) और (3) से]

या $PB = QC$ (4)

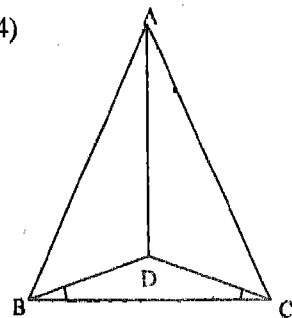
अब, ΔPBC और ΔQCB में

$PB = QC$ [(4) से]

$BC = CB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

और $\angle PBC = \angle QCB$ [(2) से]

$\therefore$ $\Delta PBC \cong \Delta QCB$ (भु-को-भु से)

अतः $PC = QB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

आकृति 9.33

उदाहरण 6 : आकृति 9.33 में $AB = AC$ है। ΔABC के अभ्यंतर में D ऐसा बिंदु है कि $\angle DBC = \angle DCB$।

सिद्ध कीजिए कि ΔABC के $\angle BAC$ को AD समद्विभाजित करता है।

हल : $\angle DBC = \angle DCB$ (दिया है)

$\therefore$ BD = CD (ΔDBC के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

अब, ΔABD और ΔACD में

AB = AC (दिया है)

BD = CD [(1) से]

और AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

इसलिए, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (भु-भु-भु कसौटी से)

$\therefore$ $\angle BAD = \angle CAD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अत: AD, $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक है।

उदाहरण 7 : यदि त्रिभुज के किसी कोण का कोण समद्विभाजक सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु है।

हल : हमें दिया है कि ΔABC की भुजा BC पर D ऐसा बिंदु है कि $\angle BAD = \angle CAD$, $BD = CD$ (आकृति 9.34) हमें सिद्ध करना है कि $AB = AC$

आकृति 9.34

रचना : हम AD को E तक इस प्रकार बढ़ाते हैं $AD = DE$। C और E को मिलाइए।

अब ΔABD और ΔECD में

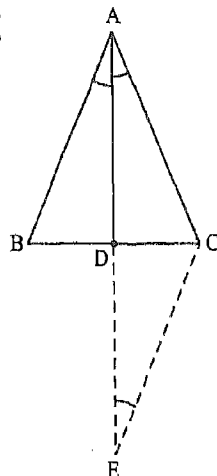
BD = CD (दिया है)

AD = ED (रचना से)

और $\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (भु-को-भु से)

इसलिए, AB = EC (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (1)

और $\angle BAD = \angle CED$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

परंतु $\angle BAD = \angle CAD$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle CAD = \angle CED$

$\therefore$ $AC = EC$ (ΔCAE के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ) (2)

अतः, $AB = AC$ [(1) और (2) से]

उदाहरण 8 : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$। भुजा BA को बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $AB = AD$ (आकृति 9.35)। सिद्ध कीजिए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।

हल : $AB = AC$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle ACB = \angle ABC$ (ΔABC के बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) (1)

और भी, $AB = AD$ (दिया है)

$\therefore$ $AC = AD$ (क्योंकि $AB = AC$ दिया है)

$\therefore$ $\angle ACD = \angle ADC$ (ΔADC के बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) (2)

(1) ओर (2) का योग करने पर

$$\angle ACB + \angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$$

या $\angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$ (3)

परंतु $\angle BCD + \angle ABC + \angle ADC = 180^0$ (ΔBCD के कोणों का योग)

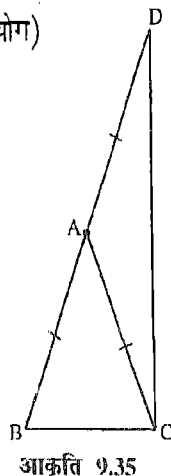
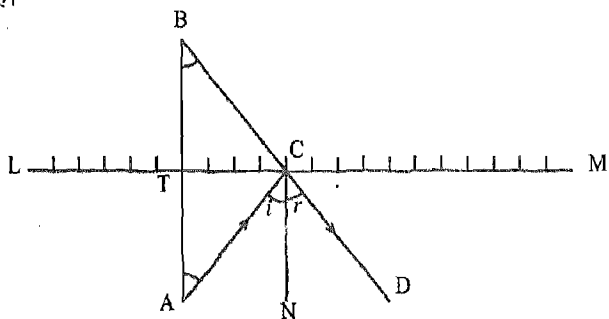
$\therefore$ $\angle BCD + \angle BCD = 180^0$ [(3) से]

या $2\angle BCD = 180^0$

अर्थात् $\angle BCD = \frac{180^0}{2} = 90^0$

अतः $\angle BCD$ समकोण है।

आकृति 9.35

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उदाहरण 8 का परिणाम उदाहरण 4 (आकृति 9.12) के परिणाम का विलोम है।

उदाहरण 9 : D पर स्थित प्रेक्षक द्वारा, समतल दर्पण LM के सामने बिंदु A पर रखी वस्तु का प्रतिबिंब, बिंदु A पर देखा गया, जैसा कि आकृति 9.36 में दर्शाया गया है। सिद्ध कीजिए कि प्रतिबिंब दर्पण के उतना ही पीछे है जितना कि वस्तु दर्पण के आगे है।

आकृति 9.36

हल : हमें दिया गया है कि AC आपतित किरण है, CD परावर्तित किरण है, C बिंदु पर CN, LM पर अभिलंब (लंब) है और कोण i तथा r क्रमशः आपतन कोण एवं परावर्तन कोण हैं। LM पर AT लंब है और B (AT और DC का प्रतिच्छेद बिंदु) प्रतिबिंब है। हमें सिद्ध करना है कि $AT = BT$

अब, $CN \parallel AB$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ समांतर होती हैं)

BC, CN और AB की तिर्यक् रेखा है।

$\therefore \quad \angle CBA = \angle r$ (संगत कोण) (1)

और CA, CN और AB की तिर्यक् रेखा है।

$\therefore \quad \angle CAB = \angle i$ (एकांतर कोण) (2)

परंतु $\quad \angle i = \angle r$ (आपतन कोण = परावर्तन कोण)

$\therefore \quad \angle CBA = \angle CAB$ ((1) और (2) से) (3)

$\therefore \quad AC = BC$ (ΔCAB के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ) (4)

अब, ΔCAT और ΔCBT में

$\angle CTA = \angle CTB = 90^0$ (दिया है)

कर्ण AC = कर्ण BC [(4) से]

भुजा TC = भुजा TC (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore$ $\Delta CAT \cong \Delta CBT$ (समकोण कर्ण भुजा कसौटी से)

अतः AT = BT (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

टिप्पणी : उपरोक्त (3) पर पहुँचने के पश्चात्, हम निम्नानुसार भी आगे बढ़ सकते हैं : ΔCAT और ΔCBT में

$\angle CAB = \angle CBA$

$\angle ATC = \angle BTC$ (प्रत्येक 90^0)

$\therefore$ $\angle ACT = \angle BCT$ (त्रिभुज के कोणों का योग 180^0 है, तीसरे कोण बराबर होंगे)

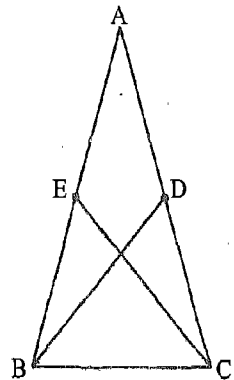
और TC = TC

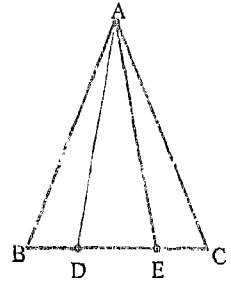
इसलिए $\Delta CAT \cong \Delta CBT$ (को-भु-को से)

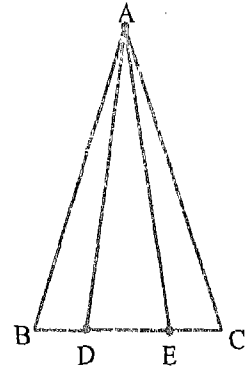
अतः AT = BT (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

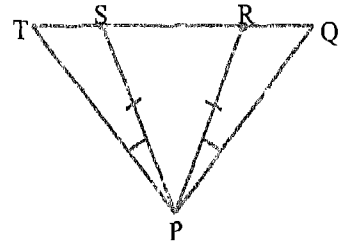
प्रश्नावली 9.2

1. आकृति 9.37 में, ABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। BD और CE त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ हैं।

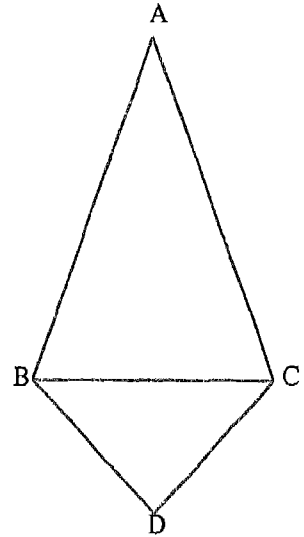
   सिद्ध कीजिए कि BD = CE

आकृति 9.37

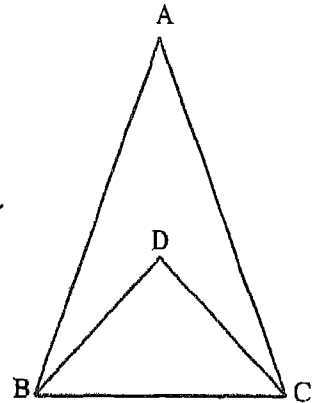
2. आकृति 9.38 में, $AB = AC$ और $BE = CD$ सिद्ध कीजिए कि $AD = AE$

आकृति 9.38

3. आकृति 9.39 में, $AD = AE$ और BC पर D तथा E ऐसे बिन्दु हैं कि $BD = EC$ सिद्ध कीजिए कि $AB = AC$

आकृति 9.39

4. आकृति 9.40 में, $PS = PR$, $\angle TPS = \angle QPR$ सिद्ध कीजिए कि $PT = PQ$

आकृति 9.40

5. यदि आकृति 9.40 में, $PQ = PT$ और $\angle TPS = \angle QPR$, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज PRS समद्विबाहु है।

6. आकृति 9.41 में, एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC ऐसे हैं कि $AB = AC$ और $DB = DC$ है सिद्ध कीजिए कि $\angle ABD = \angle ACD$

आकृति 9.41

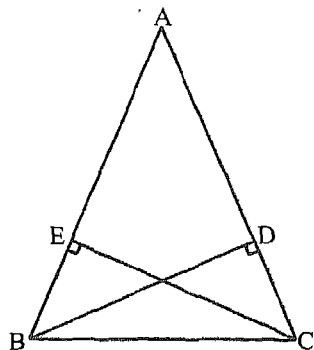
7. आकृति 9.42 में, एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC ऐसे हैं कि $AB = AC$ और $DB = DC$ है सिद्ध कीजिए कि $\angle ABD = \angle ACD$

8. सिद्ध कीजिए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।

आकृति 9.42

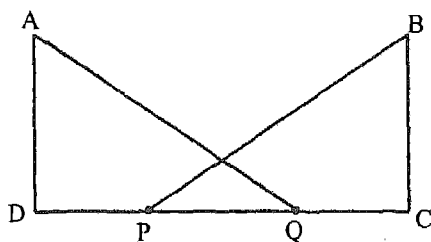
9. त्रिभुज ABC के कोण A, B और C परस्पर बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔABC समबाहु है।

10. समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$ है। BD और CE, $\angle B$ और $\angle C$ के कोणों के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि $BD = CE$।

समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि BD = CE।

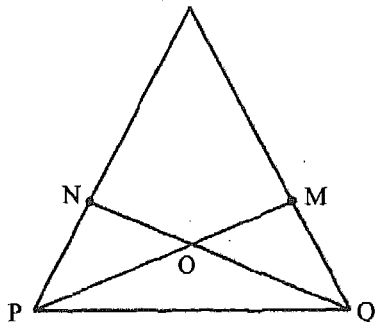
11. आकृति 9.43 में, BD और CE त्रिभुज ABC के दो ऐसे शीर्षलंब हैं कि BD = CE, सिद्ध कीजिए कि ΔABC समद्विबाहु है।

आकृति 9.43

12. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज के शीर्षलंब BD और CE बराबर हैं।

13. आकृति 9.44 में, $AB \perp CD$ और $BC \perp CD$ यदि AQ = BP और DP = CQ, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle DAQ = \angle CBP$

आकृति 9.44

14. ABCD समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC और AD त्रिभुज का शीर्षलंब है। सिद्ध कीजिए कि AD त्रिभुज की माध्यिका भी है।

15. ABCD एक वर्ग है। भुजाओं AD और BC पर क्रमशः X और Y ऐसे बिंदु हैं कि AY = BX तो सिद्ध कीजिए कि BY = AX और $\angle BAY = \angle ABX$

16. समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC और ∠B तथा ∠C के कोणों के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि BO = CO और AO, ∠BAC का कोण समद्विभाजक है।

17. आकृति 9.45 में, $\angle QPR = \angle PQR$ और ΔPQR की भुजाओं QR और PR पर क्रमशः M और N ऐसे बिंदु हैं कि QM = PN, सिद्ध कीजिए कि OP = OQ जहां, PM तथा QN का प्रतिच्छेद बिन्दु O है।

आकृति 9.45

18. त्रिभुज ABC के शीर्षलंब AD और BE ऐसे हैं कि $AE = BD$। सिद्ध कीजिए कि $AD = BE$

19. समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AC = BC$ है, तथा AD और BE शीर्षलंब हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE = BD$

20. त्रिभुज ABC में $\angle B = 2\angle C$, भुजा BC पर D एक ऐसा बिन्दु है कि AD, $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक है तथा $AB = CD$, सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = 72^0$

    (संकेत : AC पर P एक ऐसा बिन्दु लीजिए ताकि BP, $\angle B$ का कोण समद्विभाजक हो। P तथा D को मिलाइए)

21. निम्नलिखित कथनों में से कौन सत्य (T) हैं और कौन असत्य (F) हैं?
    (i) बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
    (ii) समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 होता है।
    (iii) किसी त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ असमान हो सकती हैं।
    (iv) किसी त्रिभुज के दो बराबर कोणों के कोण समद्विभाजक बराबर होते हैं।
    (v) दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज का कर्ण एवं एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण एंव एक भुजा के बराबर हों।
    (vi) यदि एक समकोण त्रिभुज की कोई भी दो भुजाएं, क्रमशः दूसरे समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं के बराबर हों, तब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
    (vii) त्रिभुज की दो बराबर भुजाओं के संगत शीर्षलंबों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

22. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक कथन सत्य हो:
    (i) त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ .... होती हैं।
    (ii) त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण .... होते हैं।
    (iii) समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$ है, यदि BD और CE शीर्षलंब हों, तो BD .... CE है।
    (iv) यदि त्रिभुज ABC के शीर्षलंब CE और BF बराबर हों, तो AB = ...
    (v) समकोण त्रिभुजों PQR और DEF में, यदि कर्ण $PQ = EF$, और भुजा $PR = DE$, तब $\Delta PQR \cong$ ....
    (vi) त्रिभुज ABC में, यदि $BC = AB$ और $\angle C = 80^0$ तब $\angle B =$ ....
    (vii) त्रिभुज PQR में, यदि $\angle P = \angle R$ तब PQ ....

अध्याय 10

त्रिभुज में असमिकाएँ

10.1 भूमिका

अभी तक का ज्यामिति का अध्ययन मूलतः ऐसी विधियों से संबंधित रहा है, जो उन प्रतिबंधों के आधीन हैं जिनके अंतर्गत राशियां जैसे भुजाएँ और कोण बराबर हैं या सर्वांगसम हैं (उदाहरण के लिए समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाएँ या कोण)। ऐसी बहुत सी स्थितियाँ होती हैं, जहाँ समानता या सर्वांगसमता नहीं होती, फिर भी हम दो राशियों की तुलना कर सकते हैं। ऐसी स्थितियों में दो राशियों के बीच ऐसा सम्बंध बनता है जिसे हम असमिका सम्बंध कहते है। *असमिका* दो मूलभूत विचारों पर ध्यान आकर्षित करती है, यथा

(i) दो राशियाँ बराबर नहीं हैं।

(ii) तुलना की जाने वाली दो राशियों में से *एक दूसरे से बड़ी (या छोटी)* है

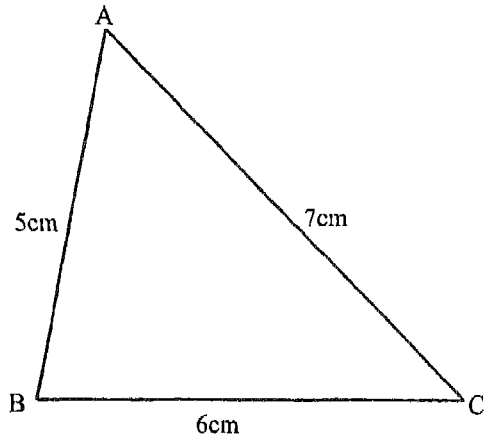
याद कीजिए कि हमारे समक्ष ऐसी परिस्थितियाँ आई हैं जहाँ हम ने रेखा-खण्डों या कोणों की असमिकाओं की चर्चा की है। ध्यान दीजिए कि यद्यपि रेखा-खण्ड और कोण मूलतः ज्यामितीय संकल्पनाएँ हैं, फिर भी उनसे संबंधित असमिकाएँ वास्तविक संख्याओं के बीच असमिकाएँ है। उसका कारण यह है कि हम भुजाओं की लम्बाइयों और कोणों के मापों की तुलना करते हैं। ये दोनों राशियां ऋणेतर वास्तविक संख्याएँ हैं। इस प्रकार,

1. जब हम कहते हैं कि एक रेखा-खण्ड दूसरे रेखा-खण्ड से बड़ा है, तब हमारा तात्पर्य होता है कि पहले रेखा-खण्ड का माप (या लम्बाई) दूसरे रेखा-खण्ड के माप से बड़ा है।

2. जब हम कहते हैं कि एक कोण दूसरे कोण से बड़ा है, तब हमारा तात्पर्य होता है कि पहले कोण का माप दूसरे कोण के माप से बड़ा है।

इस अध्याय में, हम त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच कुछ असमिका संबंधों का अध्ययन करेंगे।

10.2 त्रिभुज की भुजाएँ और कोण

आरंभ में, मान लीजिए हम एक त्रिभुज ABC की रचना करें जिसकी भुजाएँ असमान हों जैसे AB = 5 सेमी, BC = 6 सेमी और AC = 7 सेमी (आकृति 10.1) अब हम तीनों कोणों A, B और C को चांदा (प्रोट्रेक्टर) की सहायता से मापेंगे और उनकी तुलना करेंगे। हम देखते हैं कि

आकृति 10.1

$\angle B > \angle C$, $\angle B > \angle A$ और $\angle A > \angle C$

इस प्रकार, इस आकृति में हम ध्यान देते हैं कि

(i) $AC > AB$ और $\angle B > \angle C$ अर्थात् बड़ी भुजा के सम्मुख कोण बड़ा है।

(ii) $AC > BC$ और $\angle B > \angle A$ अर्थात् बड़ी भुजा के सम्मुख कोण बड़ा है।

(iii) $BC > AB$ और $\angle A > \angle C$ अर्थात् बड़ी भुजा के सम्मुख कोण बड़ा है।

हम तीनों कोणों A, B और C की तुलना उनको काटकर और एक दूसरे पर रखकर भी कर सकते हैं। तब भी हम उन्हीं तीन प्रेक्षणों (i), (ii), और (iii) पर पहुँचेंगे। दूसरे मापों के त्रिभुजों पर भी यह उपरोक्त प्रक्रिया की पुनरावृत्ति कर सकते हैं। प्रत्येक बार हमें प्राप्त होगा कि बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है। इन प्रेक्षणों के आधार पर हम निम्नलिखित परिणाम का कथन लिखते है।

गुणधर्म 10.1 : *यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा होता है।*

इस पर ध्यान दीजिए कि उपरोक्त परिणाम को पिछले अध्याय में सीखे गए

समद्विबाहु त्रिभुज के गुणधर्मों का उपयोग करके सिद्ध किया जा सकता है। इस परिणाम के विलोम के संबंध में हम क्या कह सकते है? यह निम्नानुसार है:

प्रमेय 10.1 : *किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा छोटे कोण के सामने की भुजा से बड़ी होती है।*

याद कीजिए कि पिछली कक्षाओं में हमने रचना और मापन के द्वारा इस परिणाम को सत्यापित किया था। किन्तु, हम इस परिणाम को निम्नानुसार सिद्ध कर सकते है।

दिया है : त्रिभुज ABC जिसमें $\angle B > \angle C$

सिद्ध करना है : $AC > AB$

उपपत्ति : ΔABC के लिए केवल तीन निम्न संभावनायें हैं। जिनमें से एक ही सत्य होना चाहिए:

(i) $AC = AB$ (ii) $AC < AB$ और (iii) $AC > AB$

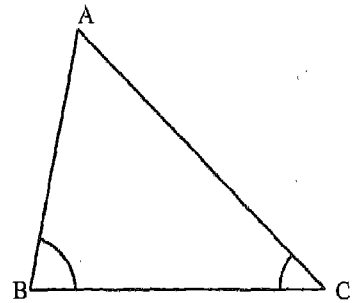
आकृति 10.2

स्थिति (i) : यदि $AC = AB$ तब

$\angle B = \angle C$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

परंन्तु यह दिए गए तथ्य, अर्थात्

$\angle B > \angle C$ का विरोधी है।

$\therefore \; AC \neq AB$

स्थिति (ii) : यदि $AC < AB$, अर्थात् $AB > AC$

इसलिए $\angle C > \angle B$ (बड़ी भुजा के सम्मुख कोण बड़ा होता है) परन्तु यह भी दिये गए तथ्य का विरोधी है (दिया है कि $\angle B > \angle C$) इसलिए AC, AB से छोटी नहीं है $(AC \nless AB)$।

अतः, हमारे पास केवल तीसरी संभावना शेष है, अर्थात् $AC > AB$, यह अवश्य सत्य होगी।

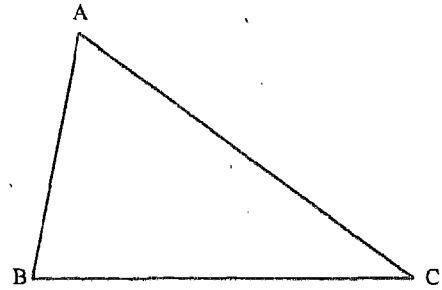
ध्यान दीजिए कि यह उपपत्ति भी *'निश्शेषता द्वारा उपपत्ति'* (Proof by exhaustion) के प्रकार की है।

10.3 त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग

त्रिभुज के कोणों और भुजाओं के बीच असमिका संबंधों का परीक्षण करने के पश्चात्, अब हम इस तथ्य का परीक्षण करें कि क्या त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एक दूसरे से किसी प्रकार से संबंधित होती है। इसके लिए, हम कागज पर कोई त्रिभुज ABC बनाते है (आकृति 10.3) और उसकी सभी भुजाओं आर्थात AB, BC और CA को मापते हैं। अब हम इन भुजाओं के भिन्न युग्मों अर्थात $AB + BC$, $BC + CA$ और $CA + AB$ का योग अलग-अलग प्राप्त करते है। हम देखते हैं कि

(i) $AB + BC > CA$

(ii) $BC + CA > AB$

(iii) $CA + AB > BC$

आकृति 10.3

दूसरे शब्दों में, हमारा प्रेक्षण है कि त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है। इस धारणा की अधिक पुष्टि करने के लिए कक्षा के किसी विद्यार्थी को बिंदु B से बिंदु C तक जाने को कहा जाए। यह पूछा जाए कि वह निम्न दो रास्तों में से कौन-सा पसंद करेगा (करेगी) :

(i) B से C तक सीधे जाना

(ii) B से A और, फिर A से C तक जाना

विद्यार्थी का स्वाभाविक उत्तर होगा "B से C तक सीधे जाना क्योंकि $BA + AC > BC$"

उपरोक्त क्रियाओं को दृष्टि में रखकर हम निम्न परिणाम को सत्य मान लेते हैं।

गुणधर्म 10.2 : *त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से बडा होता है।*

यह ध्यान में रखिए कि त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है इस गुणधर्म का उपयोग करके हम उपरोक्त परिणाम को सिद्ध कर सकते हैं। क्या आपको याद है कि पिछली कक्षाओं में बहुत सी स्थितियों में हम त्रिभुजों की रचना नही कर पाते थे, जब उसकी भुजाएँ ऐसी दी गई हों, जैसे कि 5 सेमी, 2 सेमी, 8 सेमी, 3 सेमी, 4 सेमी, 7 सेमी, 6 सेमी, 8 सेमी, 15 सेमी इत्यादि? क्या आप अब इसका कारण बता सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि

(i) $AB + BC > CA$ से हम निष्कर्ष प्राप्त करते हैं कि $AB > CA - BC$ अर्थात् $CA - BC < AB$

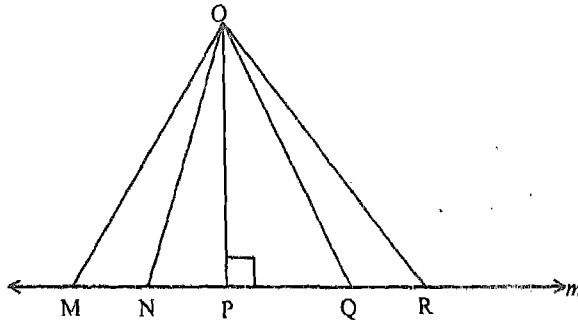
(ii) $BC + CA > AB$, से हम कह सकते हैं $BC > AB - CA$ अर्थात् $AB - CA < BC$

(iii) $CA + AB > BC$, से हम प्राप्त करते हैं कि $CA > BC - AB$ अर्थात् $BC - AB < CA$ इस प्रकार हमें गुणधर्म 10.2 का निम्न उपप्रमेय प्राप्त होता है।

त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

यह ध्यान में रखना रुचिकर होगा कि उपरोक्त गुणधर्म त्रिभुज के कोणों के लिए सत्य नहीं हैं। इसका अर्थ यह है कि यह आवश्यक नही है कि त्रिभुज के दो कोणों का योग तीसरे कोण से बड़ा हो या त्रिभुज के दो कोणों का अंतर तीसरे कोण से छोटा हो।

10.4 लाम्बिक रेखा-खण्ड सबसे छोटा है

मान लीजिए हम एक रेखा m खींचते हैं और एक बिंदु O लेते हैं, जो उस पर स्थित नहीं है (आकृति 10.4)माना O से हम रेखा m पर लम्ब OP खींचते है, बिंदु P रेखा m पर स्थित है। अब, हम बहुत से दूसरे बिंदु M, N, Q, R आदि रेखा m पर लेते हैं ओर प्रत्येक रेखा-खण्ड OM, ON, OQ, OR आदि की तुलना लांबिक रेखा-खण्ड से विभाजनी की सहायता से करते हैं। हम देखते हैं कि प्रत्येक रेखा-खण्ड OM, ON, OQ, OR आदि लांबिक रेखा-खण्ड OP से बड़ा है। इस प्रकार, लांबिक

आकृति 10.4

रेखा-खण्ड OP सबसे छोटा है। इसलिए हम निम्न परिणाम का सुझाव देते हैं:

गुणधर्म 10.3 : *किसी बिंदु से, जो दी हुई रेखा पर स्थित नहीं है, रेखा तक खींचे गए सभी रेखा-खण्डों में से लांबिक रेखा-खण्ड सबसे छोटा होता है।*

इस पर ध्यान दीजिए कि समकोण त्रिभुज एवं उसके गुणधर्म अर्थात् समकोण की सम्मुख भुजा (अर्थात् कर्ण) सभी भुजाओं में सबसे बड़ा होती है, का उपयोग करके उपरोक्त परिणाम की तर्कसंगत उपपति दी जा सकती है। अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा इन परिणामों का उपयोग प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 1 : आकृति 10.5 में, ΔABC में $AB > AC$ और भुजा BC पर D कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $AB > AD$

हल : $AB > AC$ (दिया है)

$\therefore \quad \angle C > \angle B$ (1)

(बड़ी भुजा के सामने का कोण)

अब, $\angle ADB > \angle C$ (2)

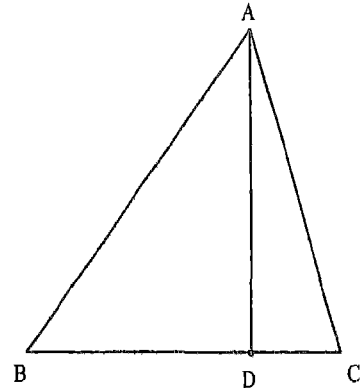
(ΔADC का बहिष्कोण अंतः अभिमुख कोणों में से प्रत्येक से बड़ा है)

इसलिए, $\angle ADB > \angle B$ [(1) और (2) से]

A

B D C

आकृति 10.5

$\therefore$ $AB > AD$ (ΔABD में बड़े कोण की अभिमुख भुजा)

उदाहरण 2 : ΔPQR के अभ्यंतर में S कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $SQ + SR < PQ + PR$

हल : QS को इतना बढ़ाइये कि वह PR को T पर प्रतिच्छेद करे (आकृति 10.6)

अब, ΔPQT में, $PQ + PT > QT$

(त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है)

अर्थात् $PQ + PT > SQ + ST$ (1)

और ΔTSR में,

$ST + TR > SR$ (2)

(त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बडा होता है)

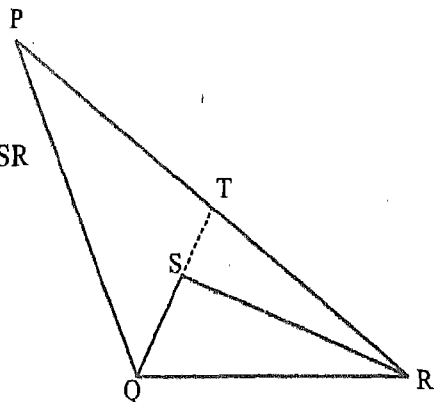
(1) और (2) का योग करने पर,

हमें प्राप्त होता है :

$$PQ + PT + ST + TR > SQ + ST + SR$$

या $PQ + PT + TR > SQ + SR$

या $PQ + PR > SQ + SR$

अतः, $SQ + SR < PQ + PR$

आकृति 10.6

उदाहरण 3 : किसी बिंदु P से, जो रेखा m पर स्थित नहीं है, रेखा m तक खींचे गए सभी रेखा-खण्डों में से मान लीजिए PD सबसे छोटा है। यदि m पर B और C ऐसे बिंदु हैं कि D, BC का मध्य-बिंदु है, तो सिद्ध कीजिए कि $PB = PC$

हल : हमें दिया है कि बिंदु P से, जो रेखा m पर स्थित नहीं है, रेखा m तक खींचे गए सभी रेखा-खण्डों में से PD सबसे छोटा है और m पर B तथा C ऐसे बिंदु हैं कि $BD = CD$ (आकृति 10.7) हमें सिद्ध करना कि $PB = PC$

अब, P से m तक खींचा गया सबसे छोटा रेखा-खंड PD है। (दिया है)

$\therefore$ $PD \perp m$

अर्थात् $\angle PDB = \angle PDC = 90^0$ (1)

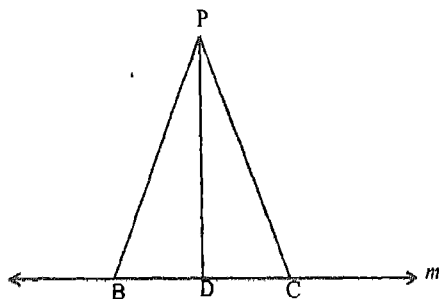
अब् ΔPBD और ΔPCD में

$BD = CD$ (दिया है)

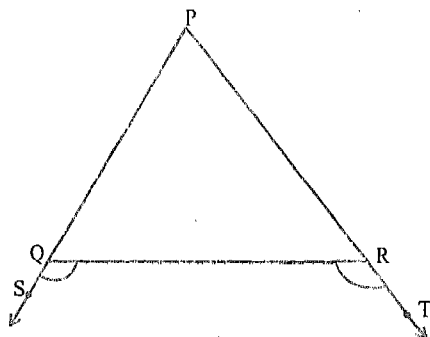
$\angle PDB = \angle PDC$ [(1) से]

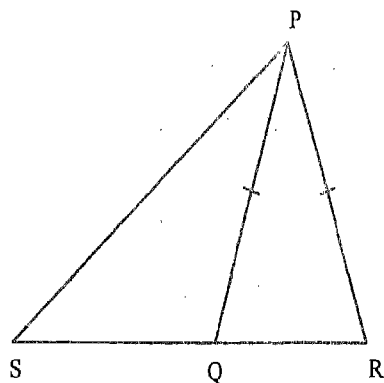
और $PD = PD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

इसलिए $\Delta PBD \cong \Delta PCD$ (भु-को-भु से)

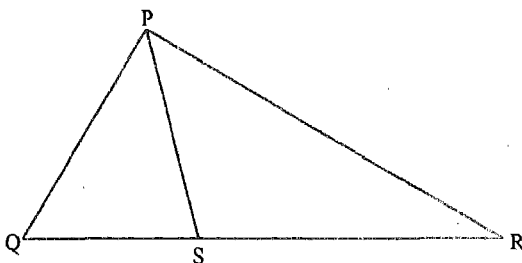
अतः $PB = PC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

आकृति 10.7

प्रश्नावली 10.1

1. आकृति 10.8 में, भुजाओं PQ और PR को बढ़ाया गया है और $\angle SQR < \angle TRQ$ सिद्ध कीजिए कि $PR > PQ$

आकृति 10.8

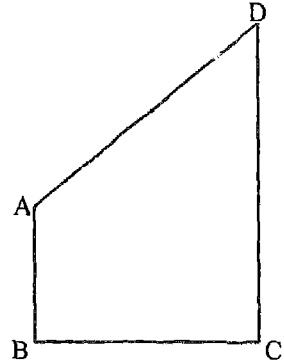
2. आकृति 10.9 में, ΔPSR की भुजा SR पर Q एक ऐसा बिन्दु है कि $PQ = PR$। सिद्ध कीजिए कि $PS > PQ$।

आकृति 10.9

3. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी (या सबसे बड़ी) भुजा है।

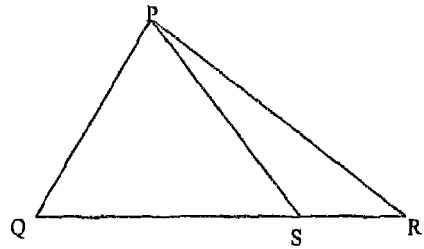
4. आकृति 10.10 में, $PR > PQ$ और PS, $\angle QPR$ का कोण समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PSR > \angle PSQ$

आकृति 10.10

5. AD, ΔABC के $\angle A$ का कोण समद्विभाजक है, जहाँ D भुजा BC पर स्थित है। सिद्ध कीजिए कि $AB > BD$ और $AC > CD$

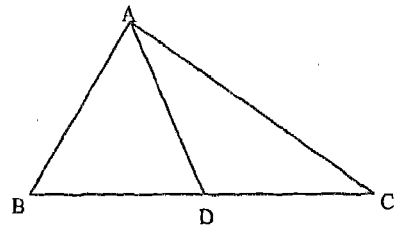
6. आकृति 10.11 में, AB और CD चतुर्भुज ABCD की क्रमशः सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$

(संकेत : A और C को मिलाइए, आदि)

आकृति 10.11

7. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज के तीनों शीर्ष लंबों का योगफल त्रिभुज की तीनो भुजाओं के योगफल से कम होता है।

8. आकृति 10.12 में ΔPQR की भुजा QR पर S कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $PQ + QR + RP > 2PS$

आकृति 10.12

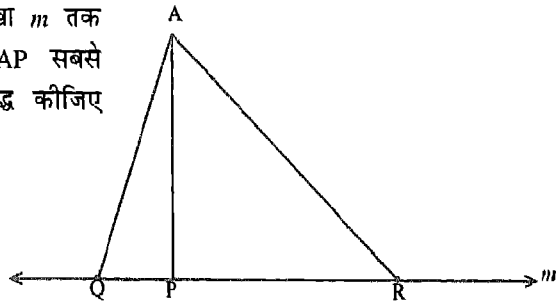
9. आकृति 10.13 में, AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है। सिद्ध कीजिए कि $AB + AC > 2AD$

(संकेत : AD को E तक इतना बढ़ाइए कि $AD = DE$ और C तथा E को मिलाइए)

आकृति 10.13

10. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योगफल उसकी तीनों माध्यिकाओं के योगफल से बड़ा होता है।

(संकेत : प्रश्न 9 के परिणाम का उपयोग कीजिये)

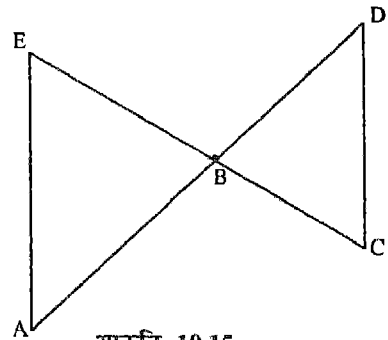
11. आकृति 10.14 में, बिंदु A से रेखा m तक खींचे गए रेखा-खण्डों में से AP सबसे छोटा है। यदि $PR > PQ$ तो सिद्ध कीजिए कि $AR > AQ$

(संकेत : क्योंकि AP सबसे छोटा रेखा-खण्ड है, $AP \perp m$। अब PR पर एक ऐसा बिंदु S लीजिए कि $PS = PQ$)

आकृति 10.14

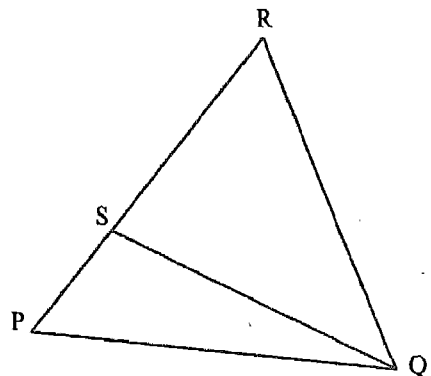
12. चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR और QS परस्पर O पर प्रतिच्छेत करते हैं। सिद्ध कीजिए कि

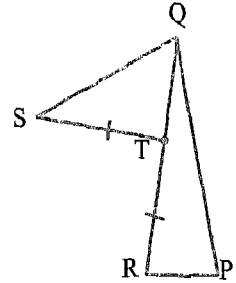
(1) $PQ + QR + RS + SP > PR + QS$

(2) $PQ + QR + RS + SP < 2(PR + QS)$

(संकेत : $OP + OS < PS$, आदि)

13. आकृति 10.15 में, $\angle E > \angle A$ और $\angle C > \angle D$ सिद्ध कीजिए कि $AD > EC$

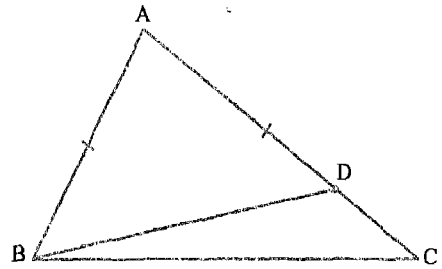
आकृति 10.15

14. आकृति 10.16 में, $PQ = PR$ और भुजा PR पर S कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $RS < QS$

आकृति 10.16

15. आकृति 10.17 में, ΔPQR की भुजा QR पर T कोई बिंदु है और S ऐसा बिंदु है कि $RT = ST$ सिद्ध कीजिए कि $PQ + PR > QS$

आकृति 10.17

16. आकृति 10.18 में, $AC > AB$ और AC पर D ऐसा बिंदु है कि $AB = AD$। सिद्ध कीजिए कि $CD < BC$

[संकेत : $AB = AD$ इसलिए $\angle ABD = \angle ADB$, आदि]

टिप्पणी : क्या आप पुनः देख सकते हैं कि किन्ही दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है?

आकृति 10.18

17. निम्न कथनों में से कौन सत्य (T) हैं और कौन असत्य (F) हैं?

(i) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटा होता है।

(ii) यदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हों, तो बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

(iii) त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

(iv) त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा के बराबर होता है।

(v) किसी बिंदु से, जो दी हुई रेखा पर स्थित नहीं है, रेखा तक खींचे गऐ सभी रेखा-खण्डों में से लांबिक रेखा-खण्ड सबसे छोटा होता है।

(vi) त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसके तीनों शीर्ष-लम्बों के योग से कम होता है।

18. रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि निम्न कथन सत्य हों:

(i) त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से .... होता है।

(ii) यदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हों, तो छोटे कोण के सामने की भुजा .... होती है।

(iii) किसी बिंदु से, जो दी हुई रेखा पर स्थित नहीं है, रेखा तक खींचे गए सभी रेखा-खण्डों में से .... रेखा-खण्ड सबसे छोटा होता है।

(iv) त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से .... होता है।

(v) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण .... होता है।

(vi) त्रिभुज के तीनों शीर्ष-लंबों का योग उसके परिमाप से .... होता है।

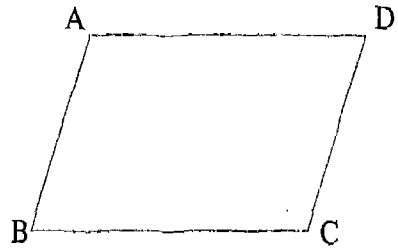
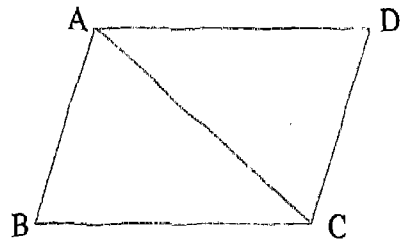
(vii) समकोण त्रिभुज में कर्ण .... भुजा है।

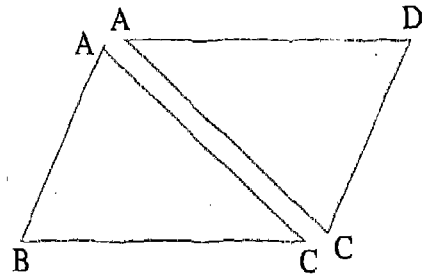
(viii) त्रिभुज का परिमाप उसके माध्यिकाओं के योग से .... होता है।

अध्याय 11

समान्तर चतुर्भुज

11.1 भूमिका

हमें ज्ञात है कि चार रेखा-खण्डों से निर्मित बंद आकृति को *चतुर्भुज* कहते हैं। *समान्तर* चतुर्भुज एक विशिष्ट प्रकार का चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर समांतर होती है। आकृति 11.1 में ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें AD ∥ BC और AB ∥ CD है। पिछली कक्षाओं में आपने समांतर चतुर्भुज के कुछ गुणधर्मों का अध्ययन किया है। यहाँ हम उनको पुनःस्मरण करेंगे और कुछ क्रियाओं के द्वारा उनको सत्यापित करेंगे, तथा जहाँ आवश्यक हो वहाँ उस की उपपत्ति भी देंगे।

आकृति 11.1

11.2 समांतर चतुर्भुज के गुणधर्म

हम समांतर चतुर्भुज ABCD पर विचार करें, तथा AC को मिला दें। AC उस के विकर्णों में से एक है (आकृति 11.2) AC, समांतर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करता है। इन दोनों के बीच क्या संबंध है? हम समांतर चतुर्भुज ABCD को, जो कागज़ पर खींचा गया है, AC के अनु काटकर दो त्रिभुज ABC और CDA प्राप्त करते हैं

आकृति 11.2

आकृति 11.3

(आकृति 11.3)। यदि हम त्रिभुज CDA को त्रिभुज ABC पर इस प्रकार रखते हैं कि बिंदु C, A पर पड़े और CA, AC के अनु पड़े, तब स्पष्टत: $\Delta CDA, \Delta ABC$ को पूर्णत: ठीक-ठीक ढक लेगा। यह होगा क्योंकि $AC = AC, \angle CAD = \angle ACB$ (एकांतर कोण, जब समांतर रेखाओं AD और BC को AC प्रतिच्छेद करती है) और $\angle DCA = \angle BAC$ (एकांतर कोण, समांतर रेखाओं AB और CD को AC प्रतिच्छेद करती है)। इस प्रकार $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (को भु को)। अत: हमें निम्न गुणधर्म प्राप्त होता है :

गुणधर्म 11.1 : *समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।*

गुणधर्म 11.1 के अनेक परिणाम हैं जिनमें से एक है

गुणधर्म 11.2 : *समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।*

क्योंकि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$। अत:

$AB = CD$ और $BC = AD$।

इस प्रकार सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं।

गुणधर्म 11.1 का दूसरा परिणाम है

गुणधर्म 11.3 : *समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।*

पुन: क्योंकि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$,

अत: हमें प्राप्त होता है $\angle B = \angle D$

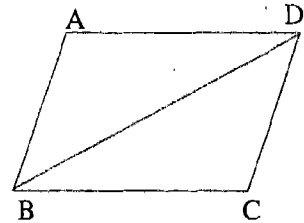
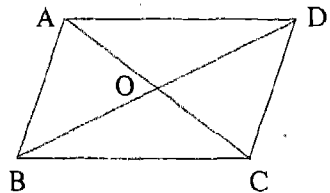
इसी प्रकार B और D को मिलाने पर (आकृति 11.4)

$$\Delta ABD \cong \Delta CDB$$

$$\therefore \quad \angle A = \angle C$$

आकृति 11.4

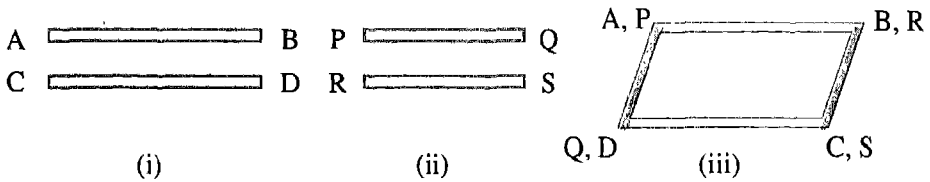
इस प्रकार सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अब मान लीजिए हम समांतर चतुर्भुज ABCD के दोनों विकर्णों को खींचते हैं (आकृति 11.5)। मान लीजिए ये दोनों विकर्ण बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि हम ΔAOB को काटकर ΔCOD पर इस प्रकार रखें कि A, C पर पड़े, B, D पर पड़े (क्योंकि $AB = CD$) तब O भी

आकृति 11.5

O पर पड़ेगा। क्योंकि $AB = CD$, $\angle OBA = \angle ODC$ और $\angle OAB = \angle OCD$ इसलिए $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (को भु को) अत: $AO = CO$ और $BO = DO$। अत:

गुणधर्म 11.4 : *समांतर चतुर्भुज में विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।*

अब हम तीन भिन्न प्रतिबंधों की विवेचना करेंगे जिनके अंतर्गत एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो जाता है।

लंबाई में बराबर दो छड़ों AB और CD का एक युग्म लीजिए। छड़ों का एक दूसरा युग्म PQ एवं RS भी लीजिए, जो लंबाई में बराबर हों। छड़ों AB और CD को PQ एवं RS से जोड़िए, जिस से कि ऐसा चतुर्भुज बने कि A, B, C, D क्रमश: P, R, S, Q पर पड़ें। आप क्या देखते हैं? चतुर्भुज हमेशा समांतर चतुर्भुज रहता है। (आकृति 11.6)

आकृति 11.6

यह निम्न गुणधर्म के कारण संभव होता है।

गुणधर्म 11.5 : *चतुर्भुज में यदि सम्मुख भुजाएँ बराबर हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।*

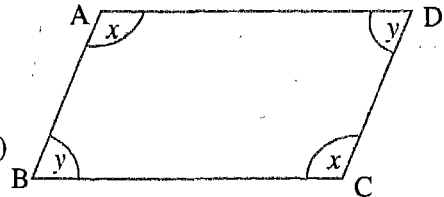
अब उस चतुर्भुज पर विचार करें जिस के सम्मुख कोण बराबर हों। मान लो ABCD ऐसा चतुर्भुज है कि $\angle A = \angle C = x$, और $\angle B = \angle D = y$ (आकृति 11.7),

तब $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2x + 2y = 360^\circ$

$x + y = 180^0$,

$\angle A + \angle B = 180^\circ = \angle A + \angle D$.

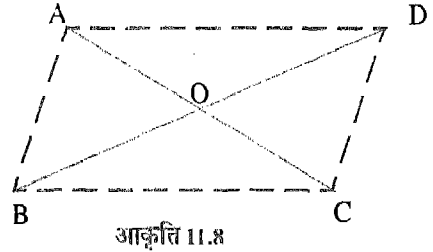
इसलिए $AD \parallel BC$ और $AB \parallel CD$ (गुणधर्म 8.9)

इस प्रकार ABCD समान्तर चतुर्भुज है।

आकृति 11.7

इस से निम्न गुणधर्म प्राप्त होता है जो कि गुणधर्म 11.3 का विलोम है।

गुणधर्म 11.6 : *चतुर्भुज में, यदि सम्मुख कोण बराबर हों, तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।*

आकृति 11.8

अन्त में हम भिन्न लंबाइयों की दो छड़ें AC एवं BD लेते हैं और उनके उभयनिष्ठ मध्य बिंदु O पर कील लगा देते हैं, जैसा कि आकृति 11.8 में, दर्शित है, जिस से कि उनमें से एक, मान लीजिए BD, O के चारों ओर धूर्णन कर सकती है। BD की भिन्न स्थितियों में, चतुर्भुज ABCD को बनाइए। हमें किस प्रकार का, चतुर्भुज प्राप्त होता है? हमें सदैव समांतर चतुर्भुज प्राप्त होता है।

यह निम्न गुणधर्म के कारण होता है, जो कि गुणधर्म 11.4 का विलोम है।

गुणधर्म 11.7 : *यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।*

उपरोक्त गुणधर्मों 11.5, 11.6 और 11.7 में दिए गए प्रतिबंधों में से प्रत्येक चतुर्भुज के समांतर चतुर्भुज होने के लिए पर्याप्त है। इसलिए हम उनमें से प्रत्येक को चतुर्भुज का समांतर चतुर्भुज होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध कहते हैं। इन के अतिरिक्त, चतुर्भुज का समांतर चतुर्भुज होने के लिए, प्रतिबंधों का एक अन्य समूह हैं। निम्न प्रमेय में उसका कथन लिखा है एवं सिद्ध किया है :

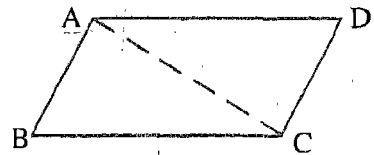
प्रमेय 11.1 *एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है यदि उस की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर और समांतर हों।*

दिया है : चतुर्भज ABCD जिस में $AB \parallel CD$ एवं $AB = CD$

सिद्ध करना है : ABCD समांतर चतुर्भुज है।

आकृति 11.9

रचना : AC को मिलाइए (आकृति 11.9)

उपपत्ति : $AB \parallel CD$ और तिर्यक रेखा AC उनको प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोण) (1)

अब त्रिभुजों ABC और CDA में

$AB = CD$ (दिया है)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ)

$\angle BAC = \angle DCA$ (1) से

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (भु को भु)

इसलिए $\angle ACB = \angle CAD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

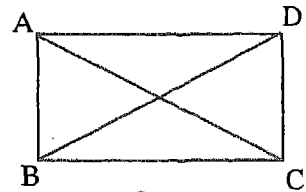
अब AD, BC दो रेखाएँ हैं और तिर्यक् रेखा AC उनको इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि एकांतर $\angle ACB$ एवं $\angle CAD$ समान हैं।

इसलिए $AD \parallel BC$ अब $AB \parallel CD$ और $AD \parallel BC$ ।

अतः, ABCD समांतर चतुर्भुज है।

11.3 कुछ विशेष प्रकार के समांतर चतुर्भुज

(क) यदि किसी चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं (या उसके सभी कोण समकोण हैं), तब उसे आयत कहते हैं।

क्योंकि सम्मुख कोण बराबर हैं, चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा ही। आकृति 11.10 में ABCD एक आयत है। पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके या अन्य प्रकार से, हम देख सकते हैं कि $AC = BD$। इस प्रकार

आकृति 11.10

गुणधर्म 11.8 : *आयत में, दोनों विकर्ण बराबर हैं।*

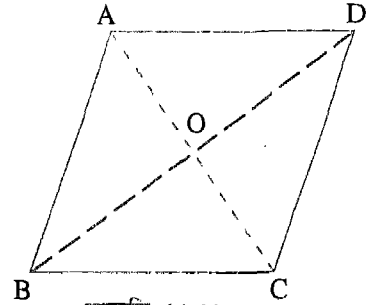
समांतर चतुर्भुजों के गुणधर्मों से हमें निम्न परिणाम भी प्राप्त होता है

आयत एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसका एक कोण समकोण है।

(ख) एक चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों, समचतुर्भुज कहलाता है।

क्योंकि सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं, सम चतुर्भुज हमेशा समांतर चतुर्भुज होता है। आकृति 11.11 में ABCD एक सम चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं, क्योंकि वे परस्पर समद्विभाजित करते हैं और

$AB = BC = CD = DA$

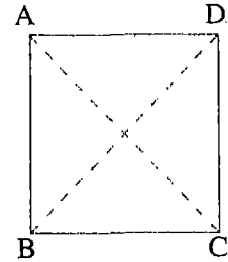
हम देख सकते हैं कि चारों त्रिभुज, जिन में यह विभाजित हो जाता हैं, यथा Δ AOD, Δ AOB, Δ COB और Δ COD सर्वांगसम हैं। इसलिए $\angle AOD = \angle AOB = \angle COB = \angle COD$ क्योंकि इन चारों का योग 360° है अतः प्रत्येक एक समकोण है। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है

आकृति 11.11

गुणधर्म 11.9 : *समचतुर्भुज में, विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।*

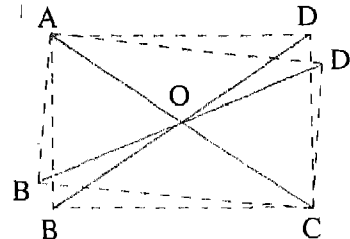
हम यह भी कह सकते हैं कि यदि समांतर चतुर्भुज की कोई दो आसन्न भुजाएँ बराबर हैं, तो वह समचतुर्भुज होता है।

(ग) एक चतुर्भुज को *वर्ग* कहते हैं यदि उस की सभी भुजाएँ बराबर हैं और उस के सभी कोण बराबर हैं। इस प्रकार वर्ग एक आयत है और समचतुर्भुज भी। इसलिए हमें प्राप्त होता है (आकृति 11.12)

गुणधर्म 11.10 : *एक वर्ग में, विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।*

हमने देखा है कि आयत, समचतुर्भुज और वर्ग सभी समांतर चतुर्भुज हैं। अब हम उन प्रतिबंधों का परीक्षण करेंगे जिनके अंतर्गत एक समांतर चतुर्भुज आयत, समचतुर्भुज या वर्ग होता है। हमें ज्ञात है कि समांतर चतुर्भुजों में विकर्णों का बराबर होना आवश्यक नहीं है, जबकि आयतों में वे बराबर होते हैं।

आकृति 11.12

मान लीजिए हम दो बराबर छड़ AC और BD लें और उन के मध्य बिंदुओं पर कील या स्क्रू की सहायता से, उन्हें जोड़ दें। यदि हम इनके सिरों को मिलाएँ तो सदैव एक आयत होगा।

इन छड़ों की भिन्न-भिन्न स्थितियाँ लेकर हम इस क्रिया की पुनरावृत्ति कर सकते हैं (आकृति 11.13)। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है :

आकृति 11.13

गुणधर्म 11.11: *यदि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह आयत होता है।*

हमने यह भी देखा है कि समांतर चतुर्भुज के विकर्णों का परस्पर लम्ब होना आवश्यक नहीं है, जबकि समचतुर्भुज के विकर्ण हमेशा परस्पर लम्ब होते हैं। अत: जब विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं, तब समांतर चतुर्भुज को समचतुर्भुज हो जाना चाहिए। इसे देखनें के लिए हम असमान लंबाइयों की दो छड़ें लेते हैं और दोनों के मध्य बिन्दुओं पर एक कील इस प्रकार लगा देते हैं कि एक छड़ इसके परित: घूम सकती है। इस को ऐसा घुमाइए जिससे कि वे समकोण पर हो जायें। उनके सिरों को मिलाइए जिससे कि समांतर चतुर्भुज बन जाये। हम क्या देखते हैं? आकृति एक समचतुर्भुज है (आकृति 11.14) यह निम्न गुणधर्मों के कारण संभव होता है:

गुणधर्म 11.12: *यदि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हो तो वह एक समचतुर्भुज होता है।*

आकृति 11.14

अन्तत: क्योंकि एक वर्ग आयत एवं समचतुर्भुज दोनों होता है, हम निष्कर्ष निकालते हैं :

गुणधर्म 11.13: *यदि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों और लंब हों, तो वह एक वर्ग होता है।*

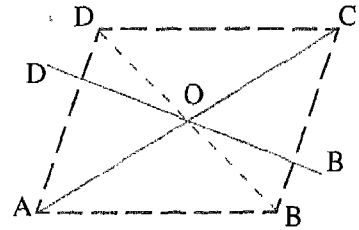
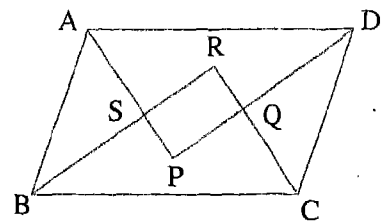
उपरोक्त गुणधर्मों का उपयोग प्रदर्शित करने के लिए अब हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 1: सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोण समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके कोण समद्विभाजक चतुर्भुज PQRS बनाते हैं (आकृति 11.15)। हमें सिद्ध करना है कि यह आयत है। यहाँ $\angle A$ का अर्धक AP और $\angle B$ का अर्धक BR परस्पर S पर प्रतिच्छेद करते हैं।

आकृति 11.15

इसलिए, $\angle BAS + \angle ABS = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$= \frac{1}{2} \times 180^{\circ}$ (AD॥BC और AB उनको प्रतिच्छेद करती है)

$\therefore \angle BAS + \angle ABS = 90°$ क्योंकि $\angle BAS + \angle ABS + \angle ASB = 180°$

$\therefore \angle ASB = 90°$ इस प्रकार $\angle RSP = 90°$ ($\angle RSP$ और $\angle ASB$ शीर्षाभिमुख हैं)।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$\angle SRQ = 90°, \angle PQR = 90°$ और $\angle SPQ = 90°$

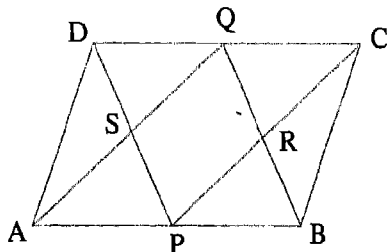
अत: PQRS एक आयत है।

उदाहरण 2 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 11.16) और P तथा Q क्रमश: सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य बिंदु हैं। यदि AQ और DP, S पर प्रतिच्छेद करते हों और BQ एवं CP, R पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि PSQR समांतर चतुर्भुज है।

हल : हमें ज्ञात है कि

$$AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD = CQ$$

और $AP \parallel CQ$

D Q C S R A P B

आकृति 11.16

इसलिए प्रमेय 11.1 से APCQ समांतर चतुर्भुज है।

विशेषकर $AQ \parallel PC$ या $SQ \parallel PR$ ।

इसी प्रकार DQBP समांतर चतुर्भुज है और इसलिए $QR \parallel SP$ ।

अत: PSQR एक समांतर चतुर्भुज है।

उदाहरण 3 : समांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ । सिद्ध कीजिए कि APCQ समांतर चतुर्भुज है।

हल : आकृति 11.17 में समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DP = BQ। हमें सिद्ध करना है कि APCQ समांतर चतुर्भुज है। त्रिभुजों APD और CQB में

BQ = DP (दिया है)

AD = BC (समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ)

और $\angle ADP = \angle CBQ$ (एकांतर कोण जब BD समांतर रेखाओं AD और BC को प्रतिच्छेद करती है)

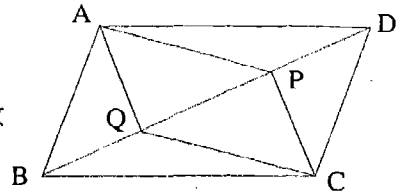
$\therefore$ $\Delta APD \cong \Delta CQB$ (भु को भु)

$\therefore$ $AP = CQ$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

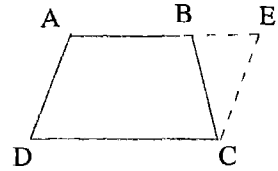
आकृति 11.17

इसी प्रकार त्रिभुजों CPD और AQB को लेकर हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$CP = AQ$।

अत: गुणधर्म 11.5 से APCQ समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्नावली 11.1

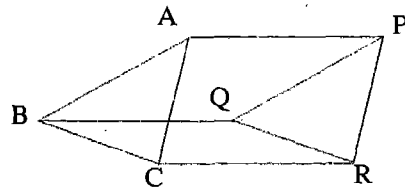
1. एक समांतर चतुर्भुज में, यदि कोई विकर्ण एक कोण को समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि वह सम्मुख कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

2. यदि ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel CD$ और $AD = BC$, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$.
[संकेत : AB को बढ़ाइए और DA के समांतर रेखा CE खींचिए (आकृति 11.18)]।

आकृति 11.18

3. एक समांतर चतुर्भुज में, दर्शाइए कि दो आसन्न कोणों के कोण समद्विभाजक समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

4. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और विकर्ण BD पर A तथा C से डाले गए लंब AP तथा CQ हैं। सिद्ध कीजिए कि $AP = CQ$।

5. AB और CD दो समांतर रेखाएँ हैं और एक तिर्यक रेखा AB को X पर तथा CD को Y पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि अन्त: कोणों के कोण समद्विभाजक एक आयत बनाते हैं।

6. आकृति 11.19 में, $AB \parallel PQ$, $AB = PQ$, $AC \parallel PR$ और $AC = PR$।
सिद्ध कीजिए कि $BC \parallel QR$ और $BC = QR$.

आकृति 11.19

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन सत्य (T) हैं और कौन असत्य (F) हैं?

   (i) समांतर चतुर्भुज में, विकर्ण बराबर होते हैं।

   (ii) समांतर चतुर्भुज में, विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

   (iii) समांतर चतुर्भुज में, विकर्ण समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

   (iv) किसी चतुर्भुज में, यदि सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर है, तो वह समांतर चतुर्भुज होता हैं।

   (v) यदि चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं, तो वह समांतर चतुर्भुज हैं।

   (vi) यदि चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हैं, तो वह समांतर चतुर्भुज हैं।

   (vii) यदि चतुर्भुज की तीन भुजाएँ बराबर हैं, तो वह समांतर चतुर्भुज हैं।

   (viii) यदि चतुर्भुज के तीन कोण बराबर हैं, तो वह समांतर चतुर्भुज हैं।

11.4 त्रिभुजों और समांतर रेखाओं सम्बन्धी कुछ अन्य प्रमेय

अब हम समांतर चतुर्भुजों के गुणधर्मो का उपयोग करके त्रिभुज के कुछ और गुणधर्मो का अध्ययन करेंगे। पिछली कक्षाओं में, हमने देखा है कि यदि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाया जाता है, तब प्राप्त रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर और लम्बाई में उसका आधा होता है। अब हम इस गुणधर्म की उपपत्ति देते हैं।

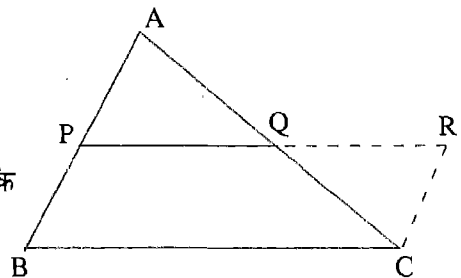
प्रमेय 11.2 : *त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समांतर और उसका आधा होता है।*

दिया है : त्रिभुज ABC में, AB के मध्य बिन्दु P तथा AC के मध्य बिंदु Q को मिलाया गया है। (आकृति 11.20)

सिद्ध करना है : PQ ॥ BC और

$$PQ = \frac{1}{2} BC$$

रचना : PQ को R तक बढ़ाइए जिससे कि

$PQ = QR$, CR को मिलाइए

आकृति 11.20

उपपत्ति : त्रिभुजों AQP और CQR में,

$AQ = QC$ (दिया है)

$PQ = QR$ (रचना)

$\angle AQP = \angle CQR$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta AQP \cong \Delta CQR$ (भु को भु)

विशेषकर, $AP = CR$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (1)

और $\angle PAQ = \angle RCQ$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

पुनः तिर्यक रेखा AC रेखाओं AB और CR को प्रतिच्छेद करती है और एकांतर कोण PAQ तथा RCQ बराबर हैं।

$\therefore$ $AP \parallel CR$ या $BP \parallel CR$

पुनः $BP = AP$ (दिया है)

और $AP = CR$ (1) से

$\therefore BP = CR$

अब $BP = CR$ और $BP \parallel CR$

$\therefore$ प्रमेय 11.1 से, PBCR एक समांतर चतुर्भुज है।

$\therefore PR = BC$ और $PR \parallel BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

इसलिए $PQ = \frac{1}{2} PR = \frac{1}{2} BC$ (क्योंकि $PQ = QR$)

और $PQ \parallel BC$

निम्न प्रमेय, प्रमेय 11.2 का विलोम है।

प्रमेय 11.3 : *त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिंदु से, एक अन्य भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।*

दिया है : त्रिभुज ABC में, AB के मध्य बिंदु P से BC के समांतर खींची गई रेखा PX तीसरी भुजा AC को Q पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है : $AQ = QC$

रचना : AB के समांतर रेखा QR खींचिए जो कि BC को बिंदु R पर प्रतिच्छेद करे (आकृति 11.21)।

उपपत्ति : PQ || BR (दिया है)

PB || QR (रचना)

$\therefore$ PQRB समांतर चतुर्भुज है और इसलिए गुणधर्म 11.2 से

PB = QR ... (1)

क्योंकि P, AB का मध्य बिंदु है, अत: AP = PB ... (2)

$\therefore$ QR = AP [(1) और (2) से) ... (3)

पुन: QR || AB और तिर्यक् रेखा AC उनको प्रतिच्छेद करती हैं,

$\therefore$ $\angle$ RQC = $\angle$ PAQ (संगत कोण) ... (4)

अब PQ || BC और AC उनको प्रतिच्छेद करती है,

$\therefore$ $\angle$ RCQ = $\angle$ PQA (संगत कोण) ... (5)

A, P, Q, X, B, R, C

आकृति 11.21

त्रिभुजों QRC और APQ, में,

QR = AP, $\angle$RQC = $\angle$PAQ, $\angle$RCQ = $\angle$PQA {(3), (4) और (5) से}

$\therefore$ ΔQRC $\cong$ Δ APQ (को को भु)

$\therefore$ QC = AQ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

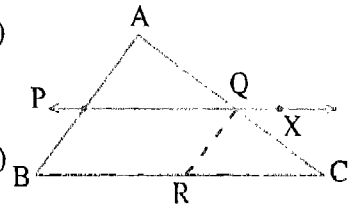
टिप्पणी : (4) का उपयोग करने के बदले, हम निम्नानुसार भी आगे बढ़ सकते हैं।

$\angle$ QRC = $\angle$ APQ, (क्योंकि QR || AP और RC || PQ).

और $\angle$ RCQ = $\angle$ PQA (संगत कोण)

$\therefore$ AP = QR का उपयोग करके

ΔQRC $\cong$ ΔAPQ (को भु को)

निम्नलिखित प्रमेय तीन समांतर रेखाओं के एक विशिष्ट गुणधर्म से सम्बन्धित है।

प्रमेय 11.4 : *यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ दी हों और उन के द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अंत: खण्ड बराबर हों तो किसी अन्य तिर्यक् रेखा पर संगत अंत: खण्ड भी बराबर होंगे।*

हम तीन समांतर रेखाओं के लिए प्रमेय को सिद्ध करेंगे, इस का विस्तार तीन से अधिक रेखाओं के लिए भी किया जा सकता है।

दिया है : l, m, n तीन समांतर रेखाएँ हैं और दो तिर्यक् रेखाएँ AB तथा CD उनको क्रमशः E, F, G एवं H, I, J बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं। और EF = FG

सिद्ध करना है : HI = IJ

रचना : I से, AB के समांतर रेखा KIL खींचिए (आकृति 11.22)।

उपपत्ति : EF ∥ KI (रचना)

EK ∥ FI (दिया है)

आकृति 11.22

∴ EKIF समांतर चतुर्भुज है और गुणधर्म 11.2 से

EF = KI ... (1)

इसी प्रकार FILG समांतर चतुर्भुज है और गुणधर्म 11.2 से

FG = IL ... (2)

क्योंकि EF = FG (दिया है)

∴ KI = IL ... (3)

पुन: $l \parallel n$ और तिर्यक रेखा CD उन को प्रतिच्छेद करती है,

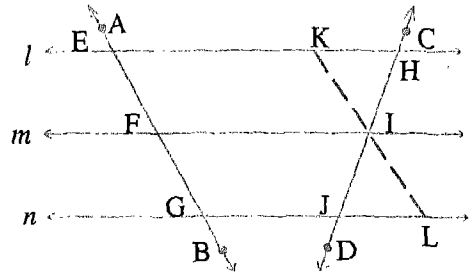
∴ ∠KHI = ∠IJL (एकांतर कोण) ... (4)

त्रिभुजों KHI और LJI, में,

KI = IL (3) से

∠KHI = ∠IJL (4) से

और ∠KIH = ∠LIJ (शीर्षाभिमुख कोण)

∴ ΔKHI ≅ ΔLJI (को भु को)

अतः $HI = JI$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अब हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 4 : एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं। दर्शाइये कि उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज एक आयत है।

हल : मान लीजिए चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर लम्ब हैं। भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु क्रमशः P, Q, R, और S हैं (आकृति 11.23)। हमें सिद्ध करना है कि PQRS एक आयत है।

आकृति 11.23

त्रिभुज ABD में, PS रेखाखण्ड भुजाओं AB और AD के मध्य बिन्दुओं को मिलाता है। इसलिए प्रमेय 11.2 से

$$PS \parallel BD \text{ और } PS = \frac{1}{2} BD \qquad \ldots \qquad (1)$$

इसी प्रकार ΔBCD पर विचार करने से, हमें प्राप्त होता है

$$QR \parallel BD \text{ और } QR = \frac{1}{2} BD \qquad \ldots \qquad (2)$$

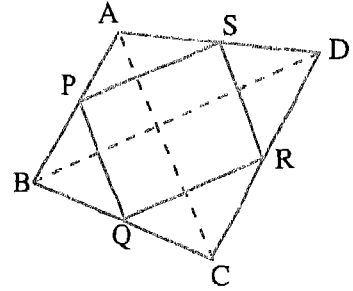
(1) और (2), से प्राप्त होता है। $PS \parallel QR$ और $PS = QR$

अतः प्रमेय 11.1 में, PQRS समांतर चतुर्भुज है।

पुनः ΔABC में PQ रेखाखण्ड भुजाओं AB और BC के मध्य बिन्दुओं को मिलाता है। अतः प्रमेय 11.2 से

$$PQ \parallel AC \text{ और } PQ = \frac{1}{2} AC \qquad \ldots \qquad (3)$$

(1), से $PS \parallel BD$ और (3) से $PQ \parallel AC$, परिणामतः PS, PQ पर लम्ब है क्योंकि BD, AC पर लम्ब है।

इसलिए PQRS आयत है।

उदाहरण 5 : समलम्ब ABCD में, असमांतर भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु क्रमशः E और F हैं (आकृति 11.24)

सिद्ध कीजिए कि

(i) $EF \parallel AB$ और (ii) $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

हल : BE को मिलाइए BE और CD को बढ़ाइए जिससे कि वे P पर प्रतिच्छेद करें। त्रिभुजों AEB और DEP में,

आकृति 11.24

$AE = ED$ (E, AB का मध्य बिंदु है)

$\angle ABE = \angle EPD$ (एकांतर कोण)

$\angle AEB = \angle DEP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \quad \Delta AEB \cong \Delta DEP$ (को को भु)

इसलिए $BE = PE$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) . . . (1)

और $AB = DP$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) . . . (2)

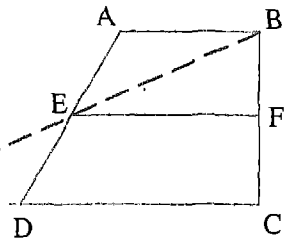
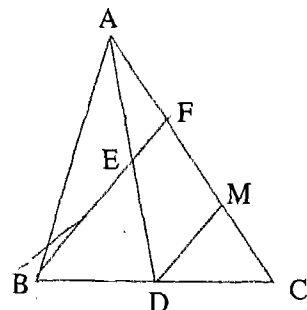
अब ΔBPC में, भुजा BP का मध्य बिदु E है, (1) से और BC का मध्य बिंदु F है (दिया है)

इसलिए प्रमेय 11.2. से

$$EF \parallel PC \text{ और } EF = \frac{1}{2} PC$$

अर्थात्, $EF \parallel AB$ और $EF = \frac{1}{2}(PD + DC)$

$$= \frac{1}{2}(AB + CD) \qquad (2) \text{ से}$$

उदाहरण 6 : आकृति 11.25 में, ABC एक त्रिभुज है, AD माध्यिका है और AD का मध्य बिन्दु E है। BE को मिलाया गया है और बढाया गया है जिससे कि वह AC को F बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $AF = \frac{1}{3} AC$

आकृति 11.25

हल : मान लीजिए CF का मध्य बिंदु M है। DM को मिलाइए। ΔBCF में भुजाओं BC और CF के मध्य बिंदु क्रमशः D और M हैं। इसलिए प्रमेय 11.2 से $DM \parallel BF$ या $EF \parallel DM$

पुनः त्रिभुज ADM में, AD का मध्य बिंदु E है और $EF \parallel DM$।

अतः 11.3 से F, AM का मध्य बिंदु होगा।

अर्थात् $AF = FM = MC$ (FC का मध्य बिंदु M है)

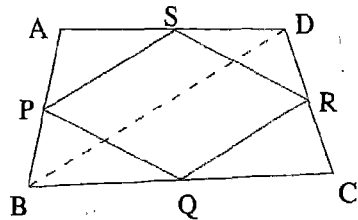
अतः $AF = \frac{1}{3} AC$.

प्रश्नावली 11.2

1. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिला कर बनाया गया चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

2. सिद्ध कीजिए कि आयत की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

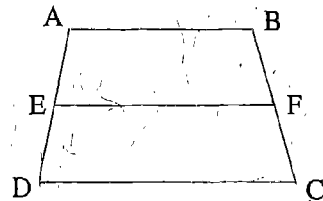
3. ABCD एक समचतुर्भुज है। AB, BC, CD, DA, के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R, S हैं। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक आयत है।

4. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज (आकृति 11.26) समांतर चतुर्भुज होता है।

आकृति 11.26

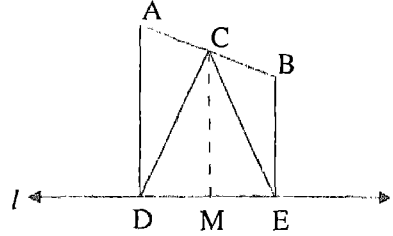
5. ΔABC का $\angle B$ समकोण है और P भुजा AC का मध्य-बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $PB = PA = \frac{1}{2} AC$

(संकेत : P से होती हुई BC के समांतर रेखा खींचिए, जो AB को Q पर मिलती हो)

आकृति 11.27

6. आकृति 11.27 में, समलंब ABCD की भुजा AD का मध्य बिंदु E है, तथा $AB \parallel DC$ है।

E से AB को समांतर खींची गई रेखा BC से F पर मिलती है। दर्शाइये कि F भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

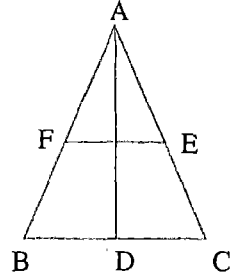
(संकेत : AC को मिलाइए)

7. A, B दो बिन्दु, रेखा l के एक ही ओर स्थित हैं। AD और BE रेखा l पर लम्ब हैं जो रेखा l को क्रमशः D और E पर मिलती हैं। C, AB का मध्यबिन्दु है। (आकृति 11.28) सिद्ध कीजिए कि CD = CE

(संकेत : C से l पर लम्ब CM खींचिए)

आकृति 11.28

8. दर्शाइए कि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

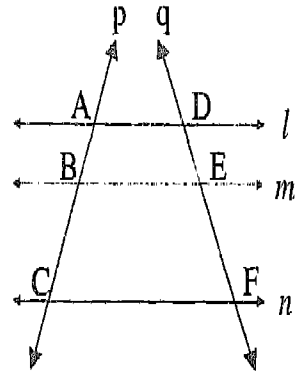
9. त्रिभुज ABC में, भुजाओं AB और AC पर क्रमशः बिंदु M और N इस प्रकार लिए गए हैं कि $AM = \frac{1}{4} AB$ और $AN = \frac{1}{4} AC$ । सिद्ध कीजिए कि $MN = \frac{1}{4} BC$

10. आकृति 11.29 में, ΔABC में AB = AC । बिन्दु D, E, F क्रमशः भुजाओं BC, AC और AB के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि रेखाखण्ड, AD रेखाखण्ड EF पर लम्ब है, और इस के द्वारा समद्विभाजित होता है।

11. समांतर चतुर्भुज ABCD में E और F क्रमशः भुजाओं AB और CD के मध्य बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए कि AF और CE, रेखाखण्ड और विकर्ण BD को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

आकृति 11.29

12. ABCD एक समचतुर्भुज है और AB को E तथा F की ओर इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AE = AB = BF । सिद्ध कीजिए कि ED और FC परस्पर लंब है।

13. त्रिभुज ABC के शीर्ष A से होकर जाने वाली किसी रेखा पर BM एवं CN लंब है। यदि L भुजा BC का मध्य बिंदु है, तो सिद्ध कीजिए कि LM = LN

14. आकृति 11.30 में, $l, m,$ और n तीन समांतर रेखाएँ तिर्यक रेखा p के द्वारा क्रमशः बिन्दुओं A, B और C पर और तिर्यक रेखा q के द्वारा क्रमशः बिन्दुओं D, E और F पर प्रतिच्छेदित की जाती हैं। यदि AB : EF = 1 : 2 सिद्ध कीजिए कि DE : EF = 1 : 2

(संकेत : BC के मध्यबिंदु से एक रेखा n के समांतर खींचिए)

आकृति 11.30

15. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने से निर्मित त्रिभुज .... होता है।

(ii) एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित त्रिभुज .... होता है।

(iii) एक चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित आकृति .... है।

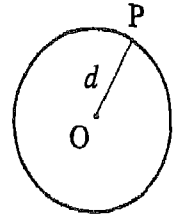
(iv) यदि तीन समांतर रेखाएँ एक रेखा को जिन दो अन्तःखंडों में विभाजित करती हैं, उनकी लंबाइयों का अनुपात 1:3 हो, तब इन्हीं समांतर रेखाओं द्वारा किसी दूसरी रेखा पर बनाए गए दो अन्तःखंडों की लंबाइयों का अनुपात .... है।

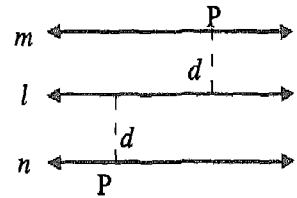
अध्याय 12

बिन्दुपथ और त्रिभुजों की संगामी रेखाएँ

12.1 भूमिका

अगर आप शब्दकोश देखेंगे तब आप पाएंगे कि *बिन्दुपथ* का अर्थ है बिन्दुओं का मार्ग। इस अर्थ से कोई सोचेगा कि किन्हीं प्रतिबन्धों के अन्तर्गत गतिमान बिन्दु का बिन्दुपथ वह वक्र है जो उन प्रतिबंधों के अन्तर्गत उस के द्वारा अनुरेखित हो। फिर भी, गणितीय दृष्टि से बिन्दुपथ उपरोक्त से कुछ अधिक है। बिन्दुपथ को अधिक यथार्थतः समझने के लिए हम निम्न उदाहरणों पर ध्यान देते हैं :

(1) यदि समतल में एक कण इस प्रकार गतिमान है कि वह उस समतल में स्थित एक नियत बिन्दु से हमेशा अचर दूरी पर स्थित हो, तो उस गतिमान कण का पथ क्या होगा? मान लीजिए O नियत बिन्दु है और d अचर दूरी है। गतिमान बिन्दु P का पथ एक वृत्त होगा (आकृति 12.1), जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या d होगी।

आकृति 12.1

(2) यदि एक कण इस प्रकार गतिमान है कि वह एक दी हुई रेखा से अचर दूरी पर रहे, तो उसका पथ क्या होगा? दी हुई रेखा ℓ एवं अचर दूरी d हो, तो गतिमान कण का पथ दो समांतर रेखाएँ m और n होंगी जो कि रेखा ℓ के समांतर हैं तथा उससे d दूरी पर उसके दोनों ओर स्थित हैं (आकृति 12.2)।

आकृति 12.2

उपरोक्त उदाहरणों में हमने देखा कि कोई कण जब कुछ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत गतिमान होता है, तब वह एक ज्यामितीय आकृति को अनुरेख करता है। इस ज्यामितीय आकृति को ही कण का *बिन्दुपथ* कहते हैं।

ज्यामिति में बिन्दु भौतिक वस्तु नहीं है। हम बिन्दु का निरूपण करने के लिए अति अल्प परिमाण के कण का विचार करते हैं। उपरोक्त को दृष्टि में रखकर हम कहते हैं कि किन्हीं प्रतिबंधों के अंतर्गत किसी बिन्दु का बिन्दुपथ वह ज्यामितीय आकृति है जो कि उसको निरूपित करने वाले कण के द्वारा अनुरेखित है। अतः हम कहते हैं :

किन्हीं प्रतिबंधों के अंतर्गत एक बिन्दु का बिन्दुपथ वह ज्यामितीय आकृति है, जिसका प्रत्येक बिन्दु दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

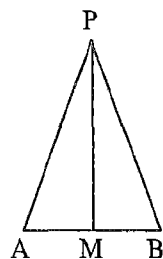
उपरोक्त परिभाषा में समाहित दो पूरक विचारों पर ध्यान दीजिए :

(i) दिए गए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाला प्रत्येक बिन्दु बिन्दुपथ पर स्थित है और

(ii) बिन्दुपथ का प्रत्येक बिन्दु दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

बिन्दुपथ से संबंधित किसी प्रमेय के सिद्ध करते समय उपरोक्त दोनों भागों (i) और (ii) को ध्यान में रखना होता है।

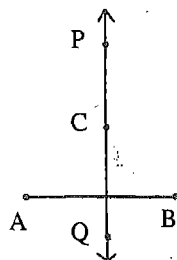
12.2 दिए हुए दो बिन्दुओं से सम-दूरस्थ बिन्दु

मान लीजिए A और B दो बिन्दु दिए हैं। हमें बिन्दु P का बिन्दुपथ इस प्रकार ज्ञात करना है कि, PA = PB। मान लीजिए P बिन्दु की स्थिति आकृति 12.3 में दर्शायी गयी है।

आकृति 12.3

मान लीजिए M, AB का मध्य बिन्दु है। PM को मिलाइए। हम देखते हैं कि दोनों त्रिभुज PAM और PBM सर्वांगसम हैं (भु भु भु)।

अतः $\angle PMA = \angle PMB$ और इसलिए प्रत्येक समकोण है।

अतः P, रेखाखण्ड AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

विलोमतः रेखा खण्ड AB का लंब समद्विभाजक PQ खींचिए (आकृति 12.4)। उस पर कोई भी बिन्दु C लीजिए। दूरियाँ CA और CB मापिए। आप देखेंगे कि दोनों दूरियाँ हमेशा बराबर हैं। अतः हमें प्राप्त होता है :

आकृति 12.4

गुणधर्म 12.1 : *उस बिन्दु का बिन्दुपथ जो दो दिए हुए बिन्दुओं से सम-दूरस्थ हो, इन बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड का लम्ब-समद्विभाजक होता है।*

अब हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं।

उदाहरण 1 : एक दिए हुए आधार पर निर्मित समद्विबाहु त्रिभुजों के शीर्ष का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB दिया गया आधार है। और C समद्विबाहु त्रिभुज का शीर्ष है (आकृति 12.5)।

अत: $CA = CB$

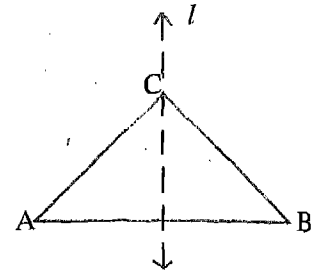
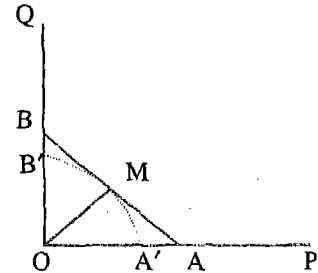
इसलिए उपरोक्त गुणधर्म से, आधार AB का लम्ब-समद्विभाजिक ℓ, C का बिन्दुपथ होगा।

आकृति 12.5

उदाहरण 2 : एक सीधी छड़ ऊर्ध्व समतल में एक दीवार और कमरे के फर्श के बीच फिसल रही है। छड़ के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

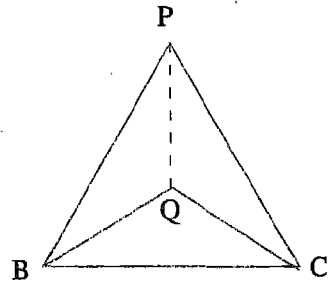
हल : मान लीजिए OP फर्श है और OQ कमरे की दीवार है। AB सरल छड़ है, जिसका मध्य बिन्दु M है। तब AOB समकोण त्रिभुज है। OM मिलाइए (आकृति 12.6)

$\therefore \quad OM = \frac{1}{2} AB$, जो कि अचर है।

इसलिए बिन्दु M स्थिर बिन्दु O से अचर दूरी पर रहता है। अत: M का बिन्दुपथ एक वृत्त है, जिसका केंद्र O और त्रिज्या $OM = \frac{1}{2} AB$, (वास्तव में बिन्दुपथ वृत्त का चतुर्थांश B'MA' होगा)

आकृति 12.6

प्रश्नावली 12.1

1. 5 सेमी त्रिज्या का वृत्त दिया है, उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो वृत्त से 2 सेमी दूरी पर है।
2. उस वृत्त के केन्द का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो दो दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाता है।
3. एक ही आधार एवं अचर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों के शीर्ष का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
4. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की त्रिज्याओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

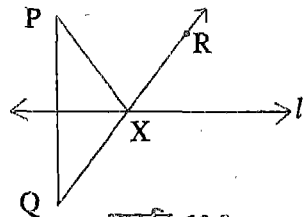
5. ΔPBC और ΔQBC एक ही आधार पर एक ही ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (आकृति 12.7)। दर्शाइए कि रेखा खण्ड PQ आधार BC के लम्ब-समद्विभाजक पर स्थित है।

6. यदि प्रश्न 5 में दोनों समद्विबाहु त्रिभुज PBC और QBC एक ही आधार पर विपरीत दिशा में स्थित हों, तब क्या होगा?

आकृति 12.7

7. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हों, तो वह समचतुर्भुज होगा।

8. उस बिन्दु का बिन्दुपथ क्या होगा जो तीन असंरेखीय बिन्दुओं A, B और C से समान दूरी पर हों? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

9. उस बिन्दु का बिन्दुपथ क्या होगा, जो तीन संरेख बिन्दुओं A, B और C से समान दूरी पर हों? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10. ℓ, रेखाखण्ड PQ का लम्ब-समद्विभाजक है और बिन्दु R रेखा ℓ के उसी ओर है जिस ओर बिन्दु P है। रेखाखण्ड QR, रेखा ℓ को बिन्दु X पर काटता है (आकृति 12.8)।

    सिद्ध कीजिए कि $PX + XR = QR$

आकृति 12.8

11. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि रेखाखण्ड AB के अंत्य बिन्दुओं से समदूरस्थ हो एवं उस के मध्य बिन्दु से 4 सेमी की दूरी पर हो।

12.3 दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु

मान लीजिए रेखाएँ ℓ और m, बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। हमें उस बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात करना है जो ℓ और m से समान दूरी पर है। मान लीजिए ℓ या m से P की दूरी d है अर्थात् P से ℓ या m पर डाले गए लम्ब रेखाखण्ड की लम्बाई d है। यदि $d = 0$ तब P दोनों ℓ और m पर स्थित है। अत: P और O संपाती हैं। इसलिए O भी P के बिन्दुपथ पर एक बिन्दु है।

यदि $d \neq 0$, P से रेखाओं ℓ और m पर लम्ब PL तथा PM खींचिए (आकृति 12.9), OP को मिलाइए। यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि

$\Delta PLO \cong \Delta PMO$

इसलिए, $\angle POL = \angle POM$

अत: OP, $\angle MOL$ का कोण समद्विभाजक है।

इसलिए $\angle MOL$ का कोण समद्विभाजक बिन्दुपथ का एक भाग है।

आकृति 12.9

इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $\angle L'OM'$ का कोण समद्विभाजक भी बिन्दुपथ का एक भाग है। अब यदि हम दोनों प्रतिच्छेदी रेखाओं ℓ और m के कोण समद्विभाजक AB या CD पर कोई बिन्दु P लें और P से खींचे गए लंब PL और PM मापें, तब हमें प्राप्त होता है कि वे बराबर हैं (आकृति 12.10) अत:

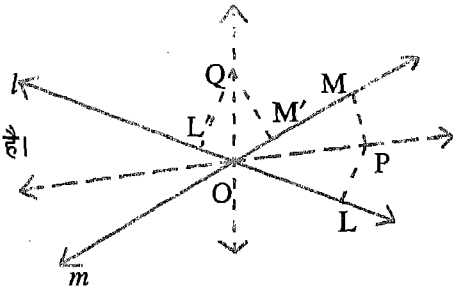
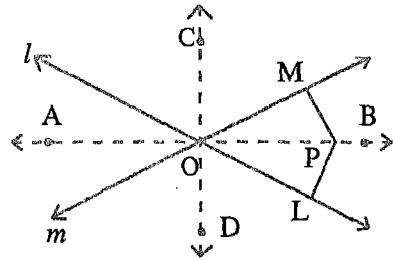
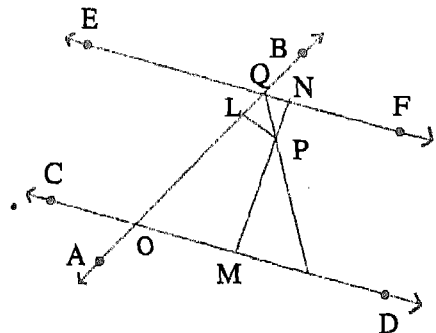
आकृति 12.10

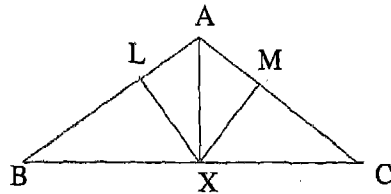
गुणधर्म 12.2 : *उस बिन्दु का बिन्दुपथ जो दी हुई दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ हो, इन रेखाओं से बने कोणों को समाद्विभाजित करने वाला रेखा-युग्म होता है।*

उदाहरण 3 : AB और CD दो रेखाएँ बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। उस बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी AB और CD से दूरियों का योग अचर राशि K है।

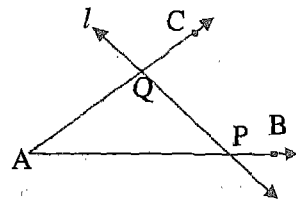
हल : मान लीजिए कि बिन्दुपथ पर एक बिन्दु P इस प्रकार है कि $PL + PM = k$ (आकृति 12.11) CD के समांतर और उस से k दूरी पर एक रेखा EF खींचिए। मान लीजिए EF और AB बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। तब P का बिन्दुपथ $\angle AQF$ का कोण समद्विभाजक होगा, क्योंकि $PL + PM = k = MN = PN + PM$

आकृति 12.11

अत: $PL = PN$

प्रश्नावली 12.2

1. त्रिभुज ABC में, $\angle A$ का कोण समद्विभाजक AX, BC को X पर प्रतिच्छेद करता है। $XL \perp AB$ और $XM \perp AC$ (आकृति 12.12)। क्या $XL = XM$ है? कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

आकृति 12.12

2. त्रिभुज के अंदर उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समदूरस्थ है।

3. एक कोण BAC दिया हुआ है और रेखा ℓ भुजाओं AB और AC को क्रमशः P तथा Q प्रतिच्छेद करती है (आकृति 12.13)। आप PQ पर वह बिन्दु X कैसे ज्ञात करेंगे जो कि AB और AC से समदूरस्थ हो? क्या ऐसा बिन्दु हमेशा विद्यमान होगा?

आकृति 12.13

4. चतुर्भुज ABCD के $\angle B$ और $\angle C$ के कोण समद्विभाजक P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइये कि P सम्मुख भुजाओं AB और CD से समदूरस्थ है।

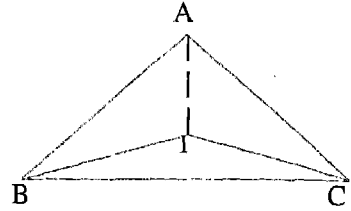
5. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं AB और CD से समदूरस्थ हो और उनके प्रतिच्छेद बिन्दु O से 5 सेमी की दूरी पर हो।

6. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
   (i) दो प्रतिच्छेद रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ .... है।
   (ii) दो समांतर रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ .... है।
   (iii) त्रिभुज की भुजाओं के तीन मध्य बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ .... है।

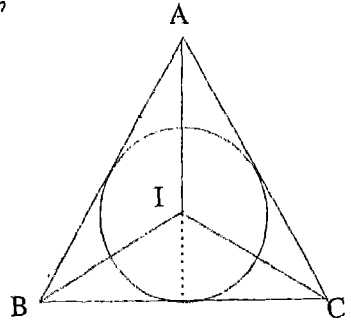
12.4 त्रिभुज की संगामी रेखाएँ

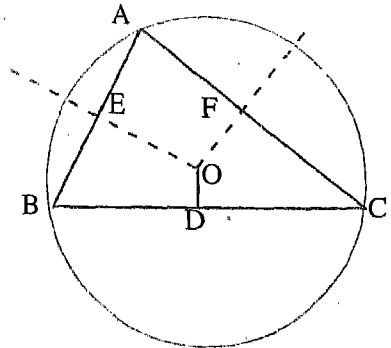
याद कीजिए कि तीन या अधिक रेखाएँ *संगामी* कहलाती हैं यदि वे सभी एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं। उभयनिष्ठ बिन्दु को *संगमन बिन्दु* कहते हैं। हम त्रिभुज से संबंधित बहुत सी संगामी रेखाओं के उदाहरणों पर विचार करेंगे।

याद कीजिए कि त्रिभुज के किसी शीर्ष और सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाले रेखा खण्ड को त्रिभुज की एक *माध्यिका* (median) कहते हैं। तदनुसार त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ होती हैं, और उस रेखा खण्ड को, जो त्रिभुज के किसी शीर्ष से, सम्मुख भुजा पर लम्ब हो, त्रिभुज का एक *शीर्ष-लम्ब* (altitude) कहते हैं। इसलिए, त्रिभुज में तीन शीर्ष-लम्ब होते हैं। त्रिभुज में भुजाओं के तीन *लम्बार्धक* (perpendicular bisectors) होते हैं। हम देखेंगे कि त्रिभुज में तीनों, कोण समद्विभाजक, शीर्ष-लम्ब, भुजाओं के लम्बार्धक और माध्यिकाएँ संगामी होते हैं।

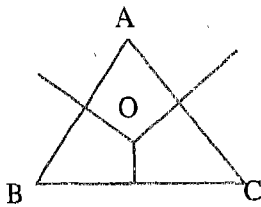
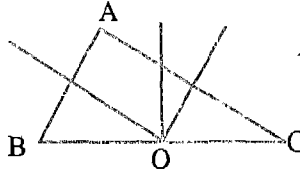
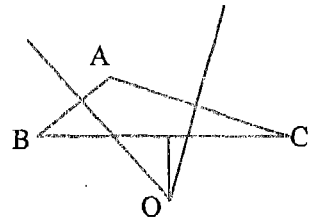
मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिस में $\angle B$ और $\angle C$ के कोण समद्विभाजक I पर प्रतिच्छेद करते हैं। AI को मिलाइए (आकृति 12.14)। $\angle BAI$ और $\angle CAI$ को मापिए। आप देखेंगे कि दोनों कोण बराबर हैं। इसलिए AI, $\angle A$ का कोण समद्विभाजक है। अत:

आकृति 12.14

गुणधर्म 12.3: *त्रिभुज के तीनों कोण समद्विभाजक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं अर्थात् संगामी होते हैं।*

बिन्दु I को त्रिभुज ABC का अन्त:केंद्र (incentre) कहते हैं। कोण समद्विभाजक के गुणधर्म से I से तीनों भुजाओं पर खींचे गए लम्ब बराबर होंगे। यदि I को केंद्र और I से किसी भुजा पर खींचे गए लम्ब को त्रिज्या मानकर वृत्त खींचा जाए, तब यह वृत्त त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करेगा। इस वृत्त को त्रिभुज का *अन्त:वृत्त* (incircle) और उसकी त्रिज्या को त्रिभुज की *अन्त:त्रिज्या* (inradius) (आकृति 12.15) कहते हैं।

आकृति 12.15

अब मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और उसकी भुजाओं AB और AC के लंबार्धक O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O को भुजा BC के मध्य बिन्दु D से मिलाइए। $\angle ODC$ को मापिए (आकृति 12.16) आप पायेंगे कि $\angle ODC$ एक समकोण है। इस प्रकार OD भुजा BC का लंबार्धक है। अत:

आकृति 12.16

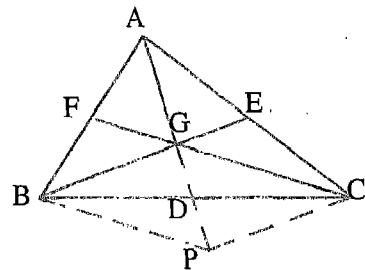
गुणधर्म 12.4: *किसी त्रिभुज की भुजाओं के लंबार्धक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं अर्थात् संगामी होते हैं।*

बिन्दु O को त्रिभुज ABC का *परिकेन्द्र* (circumcentre) कहते हैं। लंबार्धकों के गुणधर्म से, बिन्दु O तीनों शीर्षों सें समदूरस्थ है अर्थात् OA = OB = OC इस दूरी को त्रिभुज की *परित्रिज्या* (circumradius) कहते हैं और उस वृत्त को जिसका केंद्र O तथा त्रिज्या OA है, त्रिभुज ABC का *परिवृत्त* (circumcircle) कहते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि त्रिभुज का परिकेंद्र त्रिभुज के अंदर हो। यह त्रिभुज के अभ्यंतर में, त्रिभुज पर या त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में हो सकता है। यह क्रमशः इस पर निर्भर करेगा कि त्रिभुज न्यून कोण है, समकोण है या अधिक कोण त्रिभुज (आकृति 12.17 (i), (ii), (iii)) है।

आकृति 12.17

निम्न लिखित प्रमेय में हम सिद्ध करेंगे कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं।

प्रमेय 12.1 : *त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं और वह बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।*

दिया है : ΔABC में, माध्यिकाएँ, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। AG को मिलाया गया है और बढ़ाने पर वह BC को बिन्दु D पर मिलती हैं।

सिद्ध करना है : AD भी माध्यिका है अर्थात् BD = DC और G, AD, BE और CF को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

आकृति 12.18

रचना : AD को P तक बढ़ाइए जिससे कि $AG = GP$ हो। BP और CP को मिलाइए (आकृति 12.18)।

उपपत्ति : त्रिभुज ABP में रेखाखण्ड FG, AB और AP के मध्य बिन्दुओं क्रमशः F और G को मिलाता है। इसलिए, प्रमेय 11.3 से, $FG \parallel BP$ इसी प्रकार ΔACP में, $GE \parallel PC$ या $BG \parallel PC$ इसलिए BGCP समांतर चतुर्भुज है।

पुनः समान्तर चतुर्भुज के गुणधर्म 11.4 से उसके विकर्ण GP और BC परस्पर D पर समद्विभाजित करते हैं।

इसलिए $BD = DC$, एवं $GD = DP$

पुनः $GD = \frac{1}{2} GP = \frac{1}{2} AG$

$\therefore$ $AG : GD = 2 : 1$

और $FG = \frac{1}{2} BP$ (प्रमेय 11.3 से)

$\therefore$ $FG = \frac{1}{2} GC$ ($BP = GC$, समांतर चतुर्भुज को सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ $CG : GF = 2 : 1$

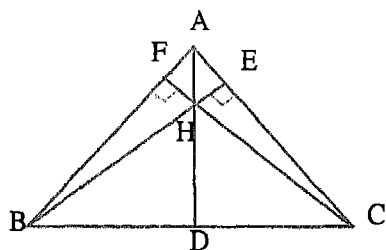
इसी प्रकार $BG : GE = 2 : 1$

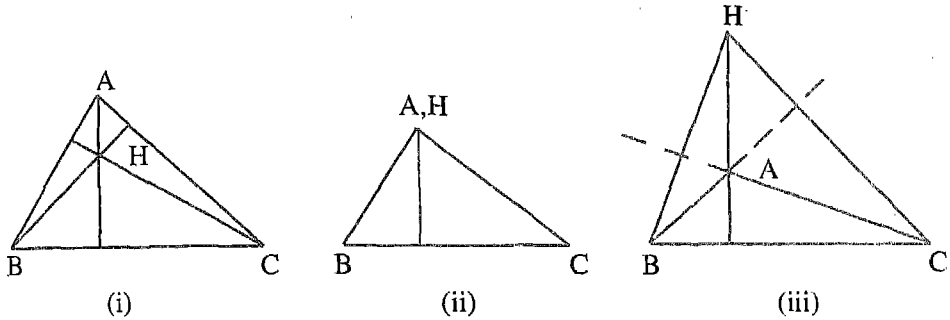
इसलिए G, AD, BE और CF को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है बिन्दु G को त्रिभुज ABC का *केन्द्रक* (centroid) कहते हैं।

आकृति 12.19

अन्त में हम त्रिभुज के तीन शीर्ष-लम्बों के प्रकरण पर विचार करें। मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसमें दो शीर्ष-लम्ब BE और CF बिन्दु H पर प्रतिच्छेद करते हैं। AH को मिलाइए और बढ़ाइए जिस से कि वह BC को D बिन्दु पर मिले (आकृति 12.19)

$\angle ADC$ को मापिए। हमें ज्ञात होगा कि $\angle ADC$ समकोण है।

इसलिए AD त्रिभुज ABC का शीर्ष-लम्ब है। अतः

गुणधर्म 12.5 : *त्रिभुज के तीनों शीर्ष-लम्ब संगामी होते हैं।*

बिन्दु H को त्रिभुज ABC का *लम्ब-केंद्र* (orthocentre) कहते हैं। यहाँ भी पुन: त्रिभुज का लंबकेंद्र त्रिभुज के अभ्यंतर में, हो सकता है या, त्रिभुज पर या त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में। यह क्रमश: इस पर निर्भर करेगा कि त्रिभुज न्यून कोण, समकोण या अधिक कोण त्रिभुज है। (आकृति 12.20 (i), (ii), (iii))

आकृति 12.20

उदाहरण 4 : यदि किसी त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : ΔABC में (आकृति 12.21), BE = CF जहाँ E और F क्रमश: AC और AB के मध्य बिन्दु हैं। हमें सिद्ध करना है कि AB = AC।

माना कि BE और CF का प्रतिच्छेद बिन्दु G है। प्रमेय 12.1 से BG : GE = 2 : 1 और CG : GF = 2 : 1

अब BE = CF तथा $BG = \frac{2}{3} BE, CG = (\frac{2}{3}) CF$

आकृति 12.21

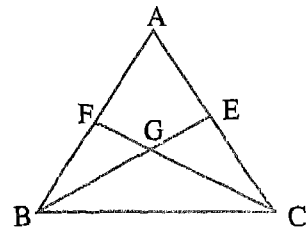
∴ BG = CG

इसी प्रकार FG = EG

त्रिभुजों BGF और CGE में

FG = EG

BG = CG

और ∠FGB = ∠EGC (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \quad \Delta BGF \cong \Delta CGE$ (भु को भु)

$\therefore \quad BF = CE$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

या $\quad 2BF = 2CE$

या $\quad AB = AC$

उदाहरण 5 : दर्शाइए कि त्रिभुज की कोई दो माध्यिकाओं का योग तीसरी माध्यिका से अधिक होता है।

हल : आकृति 12.22 में, ABC एक त्रिभुज है जिसमें AD, BE और CF माध्यिकाएँ हैं। हमें सिद्ध करना है कि

$$AD + BE > CF$$

$$AD + CF > BE$$

$$BE + CF > AD$$

हम सिद्ध करेंगे, $BE + CF > AD$

AD को बिन्दु P तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $AG = GP$ हो। PC और PB मिलाइए।

प्रमेय 12.1 के अनुसार यह सिद्ध किया जा सकता है कि BGCP एक समान्तर चतुर्भुज है। अत:

$$BG = PC$$

ΔGCP में,

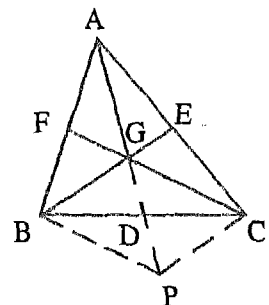
$$GC + PC > GP$$

या $\quad GC + BG > AG$ ($AG = GP$ और $PC = BG$)

या $\quad \frac{2}{3} CF + \frac{2}{3} BE > \frac{2}{3} AD$

$\therefore \quad BE + CF > AD$

आकृति 12.22

इसी प्रकार अन्य दो असमिकाओं को भी सिद्ध किया जा सकता है।

प्रश्नावली 12.3

1. त्रिभुज ABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं।

   दर्शाइए कि $BE + CF > \frac{3}{2} BC$

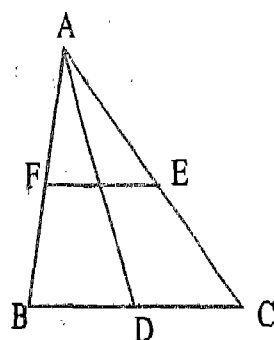
   (संकेत : $BG + GC > BC$)

2. त्रिभुज ABC में, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। दर्शाइए कि, $4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$।

3. त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA, AB के मध्यबिन्दु क्रमश: D, E और F हैं (आकृति 12.23)। दर्शाइए कि EF, AD को समद्विभाजित करती है।

आकृति 12.23

4. त्रिभुज ABC का लंबकेन्द्र P है। दर्शाइए कि त्रिभुज PBC का लंब केन्द्र A है।

5. त्रिभुज ABC समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$। D, भुजा BC का मध्य बिन्दु है। दर्शाइए कि परिकेन्द्र, अन्तःकेन्द्र, लंबकेन्द्र और केन्द्रक सभी रेखा AD पर स्थित हैं।

6. H, त्रिभुज ABC का लंबकेन्द्र है और X, Y, Z कमशः AH, BH और CH के मध्यबिन्दु हैं। दर्शाइए कि H, त्रिभुज XYZ का भी लंबकेन्द्र होगा।

7. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समदूरस्थ हो।

8. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ हो।

अध्याय 13

क्षेत्रफल

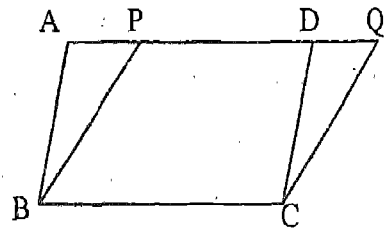
13.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में आपने कुछ क्षेत्रों, जो कि ज्यामितीय आकृतियों जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज आदि के द्वारा सीमित हैं, के क्षेत्रफल की अवधारणा का अध्ययन किया है। हम ऐसे क्षेत्रफल को क्रमशः त्रिभुज, चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज आदि का क्षेत्रफल कहते हैं। यहां हम इन आकृतियों में से कुछ के क्षेत्रफलों के संबंध में कुछ परिणामों की विवेचना करेंगे और कुछ प्रतिबंधों के अंतर्गत उनके बीच विशिष्ट संबंध प्राप्त करेंगे।

13.2 समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

इस अनुच्छेद में पहले हम एक प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 13.1 : *एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।*

दिया है : दो समांतर चतुर्भज ABCD और PBCQ जिनका आधार BC है और जो समांतर रेखाओं BC और AQ के बीच में हैं (आकृति 13.1)।

आकृति 13.1

सिद्ध करना है : क्षेत्रफल ABCD = क्षेत्रफल PBCQ

उपपत्ति : त्रिभुजों ABP और DCQ में

$\angle BAP = \angle CDQ$ (संगत कोण, जब समांतर रेखाओं AB और DC को AQ प्रतिच्छेद करती है)

$\angle BPA = \angle CQD$ (संगत कोण, जब समांतर रेखाओं BP और CQ को AQ प्रतिच्छेद करती है)

$AB = DC$ (समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएं)

$\therefore \quad \Delta ABP \cong \Delta DCQ$ (को को भु)

इसलिए क्षेत्रफल $\Delta ABP =$ क्षेत्रफल ΔDCQ

$\therefore$ क्षेत्रफल ΔABP + क्षेत्रफल BPDC = क्षेत्रफल ΔDCQ + क्षेत्रफल BPDC

अत: क्षेत्रफल ABCD = क्षेत्रफल PBCQ

टिप्पणी : 'एक ही समांतरों के बीच' का अर्थ है कि आधार एक रेखा पर स्थित है और शेष सम्मुख शीर्ष दूसरी समांतर रेखा पर स्थित हैं।

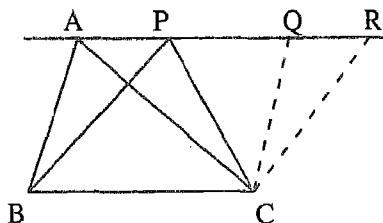
प्रमेय 13.1 का निम्न परिणाम त्रिभुज के क्षेत्रफल से संबंधित है।

गुणधर्म 13.1 : *एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।*

यहां ABC और PBC दो त्रिभुज हैं जो कि एक ही आधार BC और समान समांतर रेखाओं BC और AP के बीच स्थित हैं। मान लीजिए हम दो समांतर चतुर्भुजों की रचना करते हैं, जिनका आधार BC है और आसन्न भुजाएं, एक में AB और दूसरे में PB हो। मान लीजिए ये क्रमश: ABCQ और PBCR हैं। ध्यान दीजिए कि ये समांतर चतुर्भुज भी एक ही आधार BC और समान समांतर रेखाओं BC और AP के बीच हैं। इसलिए प्रमेय 13.1 से वे क्षेत्रफल में बराबर हैं अर्थात्

क्षेत्रफल ABCQ = क्षेत्रफल PBCR

$\therefore \quad \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ABCQ $= \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल PBCR

अत: क्षेत्रफल $\Delta ABC =$ क्षेत्रफल ΔPBC
(क्योंकि विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो समान त्रिभुजों में विभाजित करते हैं)

आकृति 13.2

आपने समांतर चतुर्भुज और त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्रों का अध्ययन पहले किया है। हम उनका पुनःस्मरण करते हैं :

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत शीर्षलम्ब

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × संगत शीर्षलम्ब

यदि हम आकृति 13.3 का संदर्भ लें, तब

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} BC \times AD$

आकृति 13.3

यहां हमारे पास तीन राशियां हैं, ΔABC का क्षेत्रफल, आधार BC और शीर्षलम्ब AD।

दो त्रिभुजों में, यदि कोई भी दो बराबर हैं तो तीसरी अपने आप बराबर है। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 13.2 : *बराबर क्षेत्रफल और बराबर आधार वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलम्ब भी बराबर होते हैं।*

उदाहरण 1 : दर्शाइए कि त्रिभुज की कोई माध्यिका उसको समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

हल : मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसमें माध्यिका AD उसको दो त्रिभुजों ABD और ACD में विभाजित करती है (आकृति 13.4)। हमें सिद्ध करना है कि दोनों के क्षेत्रफल बराबर हैं। शीर्ष A से आधार BC पर शीर्षलम्ब AE खींचिए। अब

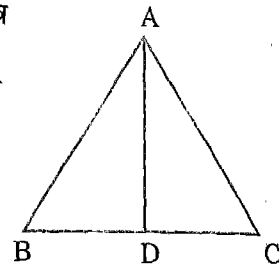
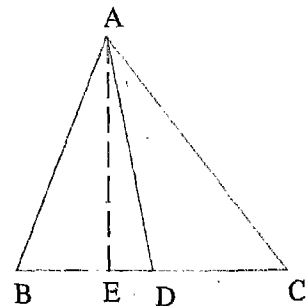
ΔABD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} BD \times AE$

ΔACD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} DC \times AE$

$= \frac{1}{2} BD \times AE$

(क्योंकि $BD = DC$)

आकृति 13.4

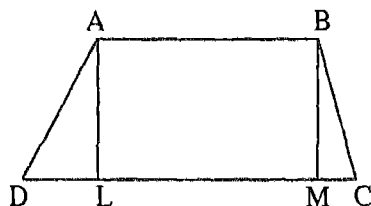
$\therefore$ ΔABD का क्षेत्रफल = ΔACD का क्षेत्रफल

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण के परिणाम का उपयोग त्रिभुज को समान क्षेत्रफल के n त्रिभुजों में विभाजित करने में किया जा सकता है। केवल आधार को n बराबर

भागों में बांट दीजिए और इन बिन्दुओं को सम्मुख शीर्ष से मिलाइए। सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होगा।

उदाहरण 2 : यदि ABCD समलंब है जिसमें AB||CD, तो दर्शाइए कि उस का क्षेत्रफल निम्न से दिया जाता है :

$$\frac{1}{2}(AB + CD) \times (AB \text{ और } CD \text{ के बीच की दूरी})$$

हल : आकृति 13.5 में ABCD समलंब है जिसमें AB||CD (AB<CD)

A और B से भुजा CD पर लम्ब AL और BM खींचिए।

A B D L M C

आकृति 13.5

तब यदि $AL = BM = h$

क्षेत्रफल ABCD = आयत ABML का क्षेत्रफल + ΔADL का क्षेत्रफल + ΔBMC का क्षेत्रफल

$$= AB \times h + \frac{1}{2} DL \times h + \frac{1}{2} MC \times h$$

$$= \frac{1}{2} h (2\,AB + DL + MC)$$

$$= \frac{1}{2} h [AB + (LM + DL + MC)] \quad (\because \; AB = LM)$$

$$= \frac{1}{2} h (AB + CD)$$

उदाहरण 3 : यदि G त्रिभुज ABC का केन्द्रक है, तो सिद्ध कीजिए कि ΔGAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{3}$ ΔABC का क्षेत्रफल

हल : ABC एक त्रिभुज दिया है जिसमें G केन्द्रक है, उसे A और B से मिलाया गया है।

हमें सिद्ध करना है कि

$$\Delta\, GAB \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{3}\, \Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल}$$

AG को बढ़ाइए जिससे कि वह BC को D पर प्रतिच्छेद करे, तब D भुजा BC का मध्य बिंदु है (आकृति 13.6)।

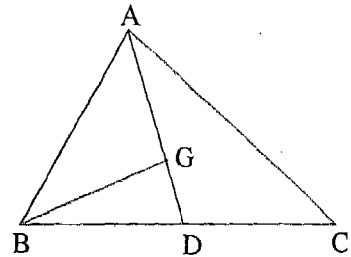
$$\text{क्षेत्रफल } \Delta ABD = \text{ क्षेत्रफल } \Delta ADC = \frac{1}{2} \text{ क्षेत्रफल } \Delta ABC \text{ (उदाहरण 1 से)}$$

पुन: G, AD को 2 : 1 अनुपात में विभाजित करती है अर्थात $AG = \frac{2}{3}\, AD$

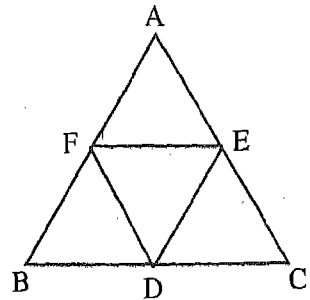
$$\therefore \text{ क्षेत्रफल } \Delta GAB = \frac{2}{3} \text{ क्षेत्रफल } \Delta ABD$$

(क्योंकि संगत शीर्षलंबों का वही अनुपात है)

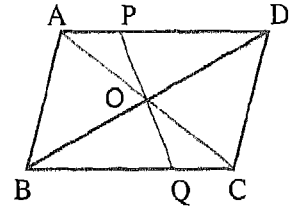
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \text{ क्षेत्रफल } \Delta ABC$$

$$= \frac{1}{3} \text{ क्षेत्रफल } \Delta ABC$$

आकृति 13.6

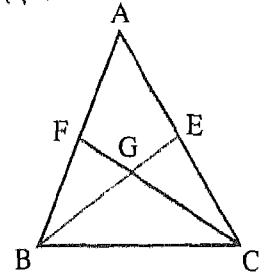
उदाहरण 4 : दर्शाइए कि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखाएं उसे चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करती हैं, जिनके क्षेत्रफल समान हैं।

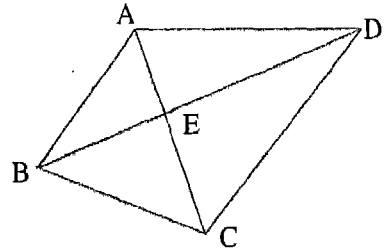
हल : आकृति 13.7 में, ABC एक त्रिभुज है जिसमें भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दुओं क्रमश: D, E और F को परस्पर मिलाया गया है, जिससे कि ΔABC चार त्रिभुजों AFE, FBD, FDE और EDC में विभाजित हो गया है। हमें सिद्ध करना है कि ये सभी त्रिभुज सर्वांगसम हैं। प्रमेय 11.2 से हम जानते हैं कि AFDE, FBDE, और FECD सभी समांतर चतुर्भुज हैं और विकर्ण FE, FD और ED उनको सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करते हैं। अत: सभी चारों त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम हैं और इसलिए उनके क्षेत्रफल समान हैं।

आकृति 13.7

प्रश्नावली 13.1

1. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से, एक रेखा खींची गई है जो AD को P पर तथा BC को Q पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि PQ समांतर चतुर्भज को दो भागों में विभाजित करती है जिनके क्षेत्रफल बराबर हैं (आकृति 13.8)।
(संकेत : सिद्ध कीजिए $\Delta AOP \cong \Delta COQ$)

आकृति 13.8

2. त्रिभुज ABC में O माध्यिका AD पर कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि क्षेत्रफल ΔABO = क्षेत्रफल ΔACO

3. ABCD एक समांतर चतुर्भुज हैं और P उसके अंदर कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि
क्षेत्रफल ΔABP + क्षेत्रफल $\Delta DCP = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ABCD
(संकेत : P से होती हुई AB के समांतर एक रेखा खीचिए)

आकृति 13.9

4. त्रिभुज ABC की माध्यिकाएं BE और CF, G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल ΔGBC = क्षेत्रफल चतुर्भुज AFGE (आकृति 13.9)

आकृति 13.10

5. आकृति 13.10 में, ABCD चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण AC और BD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि
क्षेत्रफल $\Delta AED \times$ क्षेत्रफल ΔBEC = क्षेत्रफल $\Delta ABE \times$ क्षेत्रफल ΔCDE

6. दर्शाइए कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों की लंबाइयों के गुणनफल का आधा होता है।

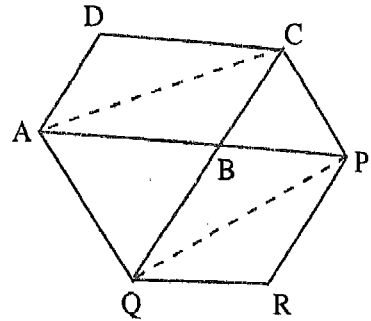
7. एक समांतर चतुर्भुज और एक आयत का उभयनिष्ठ आधार है और क्षेत्रफल बराबर हैं। दर्शाइए कि आयत का परिमाप समांतर चतुर्भुज के परिमाप से छोटा है।

8. दो त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर हैं, और उनके शीर्ष A और D, रेखा BC के विपरीत ओर स्थित हैं जिससे कि क्षेत्रफल ΔABC = क्षेत्रफल ΔDBC। दर्शाइए कि BC, रेखाखण्ड AD को समद्विभाजित करता है।

9. ABCD एक चतुर्भुज है। D से AC के समांतर खींची रेखा, बढ़ाई हुई BC को P पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल ΔABP = क्षेत्रफल ABCD।

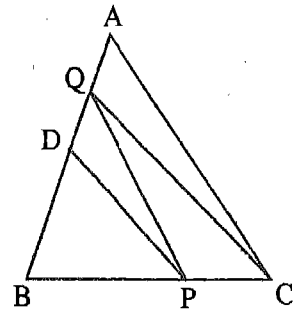
10. दो बिंदु A और B और एक धनात्मक वास्तविक संख्या k दिए हुए हैं। ऐसे बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए कि क्षेत्रफल $\Delta PAB = k$ हो।

11. आकृति 13.11 में, ABCD समांतर चतुर्भुज है। बढ़ाई हुई AB पर P कोई बिंदु है। CP के समांतर AQ खींची गई है जो कि बढ़ाई हुई CB को Q पर मिलती है। समांतर चतुर्भुज BQRP को पूरा किया गया है। दर्शाइए कि क्षेत्रफल ABCD = क्षेत्रफल BQRP।

(संकेत : त्रिभुजों AQC और AQP की तुलना कीजिए)

आकृति 13.11

12. आकृति 13.12 में, ΔABC की भुजा AB का मध्य बिन्दु D है और P भुजा BC पर कोई बिन्दु है। PD के समांतर रेखा CQ खींची गई है जो AB को Q पर प्रतिच्छेद करती है। P, Q को मिलाया गया है। दर्शाइए कि

क्षेत्रफल $\Delta BPQ = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ΔABC।

(संकेत : त्रिभुजों PDC और PDQ की तुलना कीजिए)

आकृति 13.12

अध्याय 14

ज्यामितीय रचनाएँ

14.1 भूमिका

ज्यामितीय आकृतियों की सहायता से हम अनेक ज्यामितीय साध्यों को सुगमता से समझ सकते हैं। ज्यामितीय प्रमेयों की उपपत्ति में हम केवल रफ (rough) आकृतियों को ही बनाते हैं क्योंकि प्रमेयों की उपपत्ति में हमें परिशुद्ध आकृतियों की आवश्यकता नहीं होती है। वह ज्ञान एवं कौशल जिससे आकृति के बारे में दिये गए तथ्यों से हम यथार्थ आकृति बनाते हैं अपने आप में उपयोगी है। इस ज्ञान की आवश्यकता विभिन्न व्यवसायों के अनेक लोगों, जैसे वैज्ञानिकों, गणितज्ञों, प्रविधिज्ञों, कलाकारों आदि को होती है।

ज्यामितीय चित्रों के आरेखन एवं रचना में अन्तर होता है। ज्यामितीय आरेखन में सभी सम्भव उपलब्ध उपकरण जैसे अंशाकित रूलर (पैमाना), चांदा, सेट-स्क्वायर आदि के प्रयोग की अनुमति होती है। इसके विपरीत ज्यामितीय रचना में केवल दो उपकरण *अनांशाकित रूलर* (जिसे पटरी भी कहते हैं) तथा *परकार* के ही प्रयोग की अनुमति होती है। यह ध्यान देने योग्य है कि ज्यामितीय आरेखन से ज्यामितीय रचना ज्यादा यथार्थ होती है। आप उच्चतर प्राइमरी कक्षाओं में दिए हुए रेखाखण्ड के बराबर रेखाखण्ड खींचना, दिए हुए कोण बनाना, दिए रेखाखंड का लंबसमद्विभाजक और कोण का अर्धक आदि बनाने की विधि सीख चुके हैं। आप इन प्रारम्भिक रचनाओं को पुन: दोहरा लीजिए। इससे आपको इस अध्याय के कार्यों को करने में सुगमता होगी। आपको दिये हुए नापों के अनुसार सरल दशाओं में त्रिभुज तथा चतुर्भुज की भी रचना का ज्ञान है। अब हम यहां विशेष स्थितियों में दिये गए नापों से त्रिभुजों की रचना सीखेंगे।

14.2 रचना सम्बंधी समस्याएं

प्रत्येक रचना में आकृतियों के गुणधर्मों की परख, आपकी तर्कशक्ति, रूलर तथा

परकार के प्रयोग में निपुणता की आवश्यकता होती है। रचना को निम्नलिखित भागों में विभाजित कर सकते हैं :

1. **पुनर्कथन :** रचना का पुन: कथन कीजिए, जिससे स्पष्ट हो जाए कि (a) क्या दिया है? (b) क्या अभीष्ट है?
2. **रचना के चरण :** रचना की आकृतियों को पूर्ण करने में जिस विशेष क्रम में चरणों की आवश्यकता होती है उसी क्रम में उनको लिखिए।

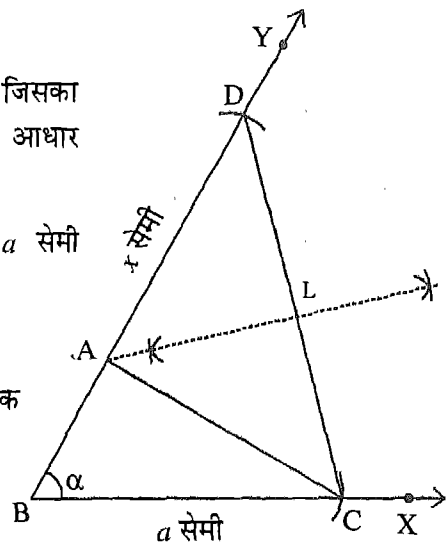
14.3 त्रिभुजों की रचनाएं

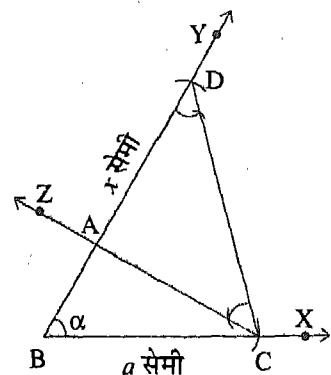
रचना 1 : त्रिभुज की रचना करनी है जिसका आधार, अन्य दो भुजाओं का योग तथा एक आधार कोण दिया हो।

दिया है : त्रिभुज ABC में, आधार BC = a सेमी
$AB + AC = x$ सेमी तथा $\angle ABC = \alpha$

अभीष्ट : त्रिभुज ABC की रचना करना।

आकृति 14.1

1. किरण BX खींचिए और उसमें से एक रेखाखण्ड BC = a सेमी काटिए।
2. $\angle XBY = \alpha$ की रचना कीजिए।
3. BY से रेखाखण्ड BD = x सेमी काटिए।
4. CD को मिलाइए।
5. CD का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, जो BD को किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करे।
6. AC को मिलाइए।

तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.1)

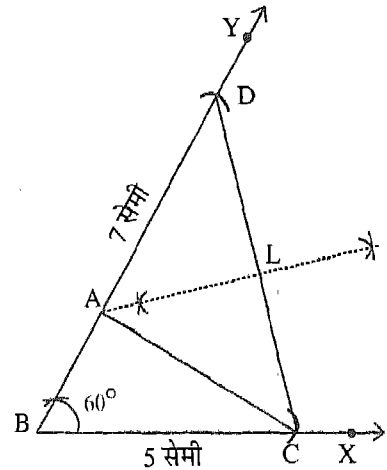
वैकल्पिक विधि : उपरोक्त चरण 4 तक अनुगमन कीजिए। फिर $\angle DCZ = \angle BDC$ बनाइए। माना किरण CZ रेखाखण्ड BD को A पर प्रतिच्छेदित करता है। तब ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.2)

आकृति 14.2

उदाहरण 1 : एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसके आधार की लम्बाई 5 सेमी, दो अन्य भुजाओं की लम्बाइयों का योग 7 सेमी और एक आधार कोण 60^0 का हो।

हल : हमें दिया है आधार BC = 5 सेमी, दो अन्य भुजाओं का योग, AB + AC = 7 सेमी, तथा आधार कोण ABC = 60^0। त्रिभुज ABC की रचना करनी है।

आकृति 14.3

रचना के चरण :

1. किरण BX खींचिए तथा उसमें से एक रेखाखण्ड BC = 5 सेमी काटिए।
2. $\angle XBY = 60^0$ की रचना कीजिए।
3. BY से रेखाखण्ड BD = 7 सेमी काटिए।
4. CD को मिलाइए।
5. CD का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो BD को किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करे।
6. AC को मिलाइए।

इस प्रकार प्राप्त ABC ही अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.3)

टिप्पणी : AL, CD का लम्ब समद्विभाजक है, अत: AD = AC।

तब BD = BA + AD

= BA + AC

= 7 सेमी, जैसी अभीष्ट है।

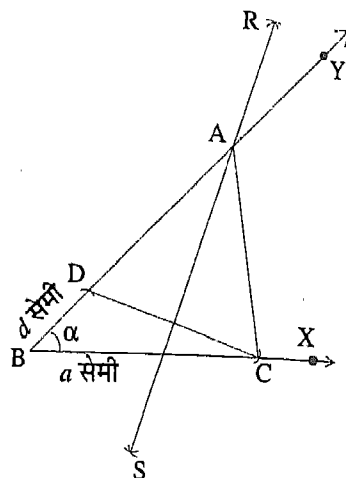
रचना 2: एक त्रिभुज की रचना करनी है जिसका आधार, दो अन्य भुजाओं का अन्तर तथा एक आधार कोण दिया हो।

दिया है : त्रिभुज ABC में आधार BC = a सेमी,
AB − AC या AC − AB = d सेमी तथा $\angle ABC = \alpha$

अभीष्ट : ΔABC की रचना करना।

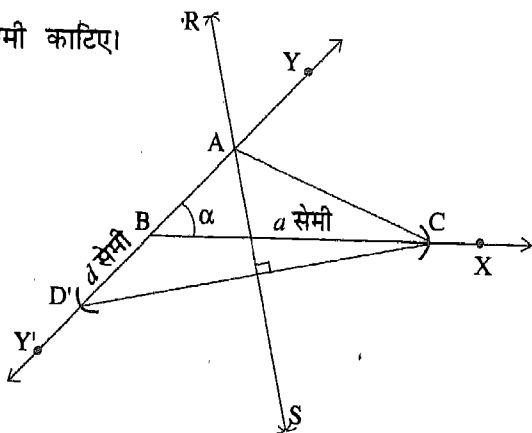
स्थिति (i) $AB > AC$ तथा $AB - AC = d$ सेमी

रचना के चरण

1. एक किरण BX खींचिए और उसमें से रेखाखण्ड $BC = a$ सेमी काटिए।
2. $\angle YBC = \alpha$ की रचना कीजिए।
3. BY से रेखाखण्ड $BD = d$ सेमी काटिए।
4. CD को मिलाइए।
5. CD का लम्ब समद्विभाजक RS खींचिए जो BY को किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करे।
6. AC को मिलाइए।

इस प्रकार, ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.4)

आकृति 14.4

स्थिति (ii) $AB < AC$ तथा $AC - AB = d$ सेमी

1. एक किरण BX खींचिए और उसमें से रेखाखण्ड $BC = a$ सेमी काटिए।
2. BC से कोण α बनाते हुए एक किरण BY बनाइए तथा BY को पीछे बढ़ाकर रेखा Y'BY प्राप्त कीजिए।
3. BY' से रेखाखण्ड $BD' = d$ सेमी काटिए।
4. CD' को मिलाइए।
5. CD' का लम्ब समद्विभाजक RS खींचिए जो BY को किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता हो।
6. AC को मिलाइए। इस प्रकार, अभीष्ट त्रिभुज ABC है। (आकृति 14.5)

आकृति 14.5

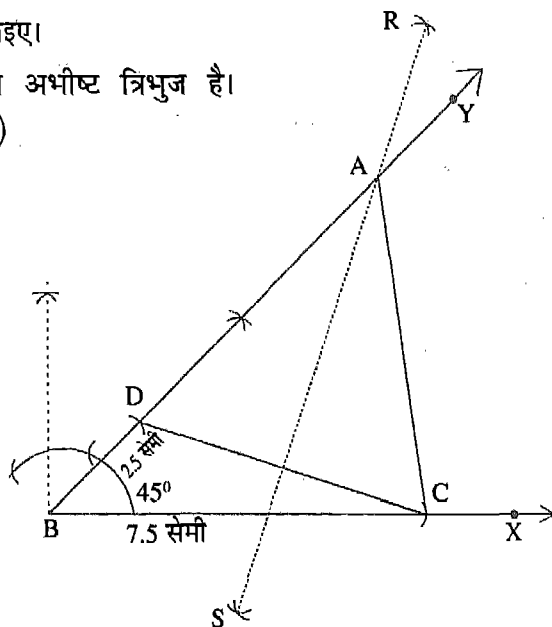
उदाहरण 2 : एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 7.5 सेमी, अन्य दो भुजाओं का अंतर 2.5 सेमी और एक आधार कोण 45^0 का हो।

हल : हमें दिया है आधार BC = 7.5 सेमी, दो अन्य भुजाओं का अन्तर, AB – AC या AC – AB = 2.5 सेमी तथा आधार कोण ABC = 45^0। ΔABC की रचना करना अभीष्ट है।

स्थिति (i) AB–AC = 2.5 सेमी।

रचना के चरण

1. एक किरण BX खींचिए और उसमें से रेखाखण्ड BC = 7.5 सेमी काटिए।
2. ∠YBC = 45^0 की रचना कीजिए।
3. BY से रेखाखण्ड BD = 2.5 सेमी काटिए।
4. CD को मिलाइए।
5. CD का लम्ब समद्विभाजक RS खींचिए जो BY को किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करे।
6. AC को मिलाइए।

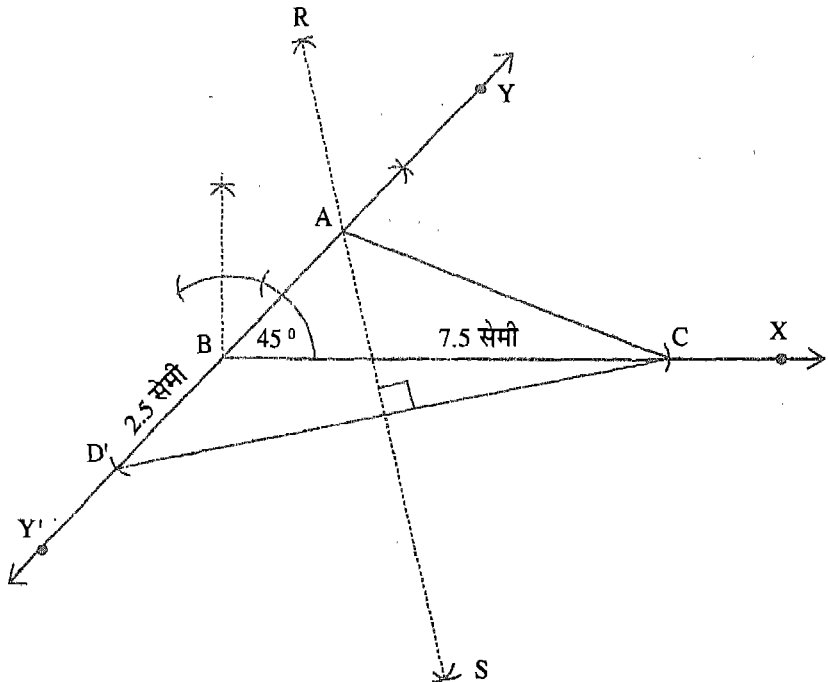
   तब, ABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।
   (आकृति 14.6)

आकृति 14.6

स्थिति (ii) AC–AB = 2.5 सेमी

रचना के चरण

1. किरण BX खींचिए और उसमें से रेखाखण्ड BC = 7.5 सेमी काटिए।
2. BC से 45^0 बनाती हुई, किरण BY खींचिए, तथा YB को बढ़ाकर रेखा YBY' बनाइए।
3. BY' से रेखाखण्ड BD' = 2.5 सेमी काटिए।
4. CD' को मिलाइए।
5. CD' का लम्ब समद्विभाजक RS खींचिए जो BY को किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेदित करता है।
6. AC को मिलाइए।

   ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.7)

नोट : आप रचना 1 की वैकल्पिक विधि को भी अपना सकते है।

आकृति 14.7

रचना 3 : त्रिभुज की रचना करना है जिसका परिमाप और आधार कोण दिये हों।

दिया है : त्रिभुज ABC जिसका परिमाप, $AB + BC + CA = x$ सभी $\angle ABC = \theta$ तथा $\angle ACB = \phi$ है।

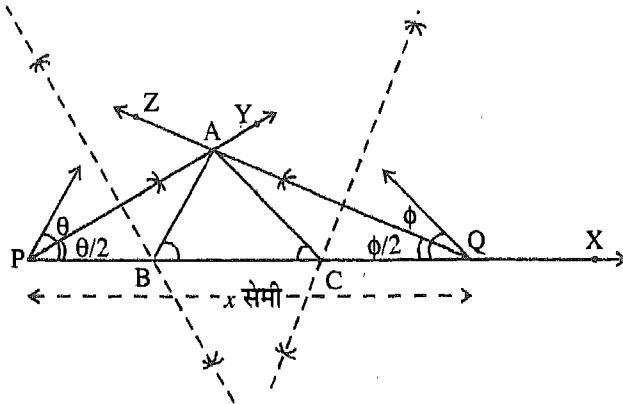
अभीष्ट : ΔABC की रचना करना।

रचना के चरण

1. एक किरण PX खींचिए और उसमें से रेखाखण्ड $PQ = x$ सेमी काटिए।
2. P पर $\angle YPQ = \frac{\theta}{2}$ की रचना कीजिए।
3. Q पर $\angle ZQP = \frac{\phi}{2}$ की रचना कीजिए।

माना किरणें PY तथा QZ किसी बिन्दु A पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती है।

4. AP का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो कि PQ को किसी बिन्दु B पर प्रतिच्छेद करता है।
5. AQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो PQ किसी बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करे।
6. AB तथा AC को मिलाइए।

ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.8)

आकृति 14.8

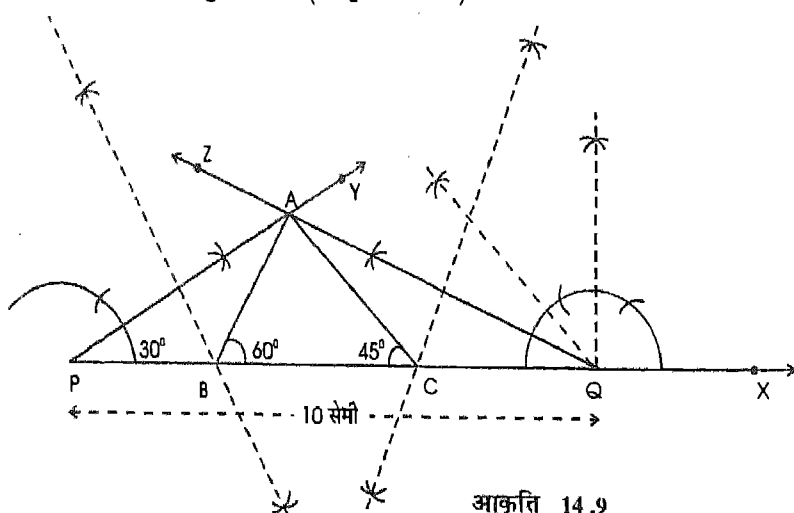
उदाहरण 3 : त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका परिमाप 10 सेमी तथा आधार के कोण 60^0 एंव 45^0 के हों।

हल : हमें दिया है त्रिभुज का परिमाप $AB + BC + CA = 10$ सेमी आधार कोण $\angle B = 60^0, \angle C = 45^0$। अभीष्ट है ΔABC की रचना करना।

रचना के चरण

1. किरण PX खींचिए तथा उससे रेखाखण्ड $PQ = 10$ सेमी काटिए।
2. P पर $\angle YPQ = 30^0$ की रचना कीजिए $(\frac{1}{2} \times 60^0)$
3. Q पर $\angle ZQP = 22\frac{1}{2}^0$ की रचना कीजिए $(\frac{1}{2} \times 45^0)$

   माना किरणें PY तथा QZ किसी बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करती हैं।
4. AP का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो PQ को किसी बिन्दु B पर प्रतिच्छेद करें।
5. AQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो कि PQ को किसी बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करे।
6. AB तथा AC को मिलाइए।

   ABC ही अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.9)

आकृति 14 .9

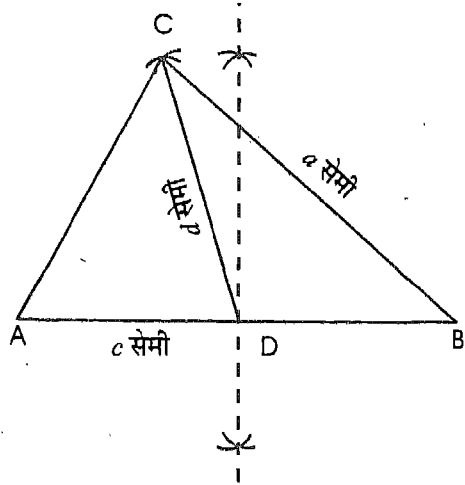
रचना 4: त्रिभुज की रचना करनी है जिसकी दो भुजाएँ तथा इनमें से एक भुजा की संगत माध्यिका ज्ञात हो।

दिया है : ΔABC जिसमें $AB = c$ सेमी, $BC = a$ सेमी तथा माध्यिका $CD = d$ सेमी।

अभीष्ट : ΔABC की रचना करना।

आकृति 14.10

रचना के चरण

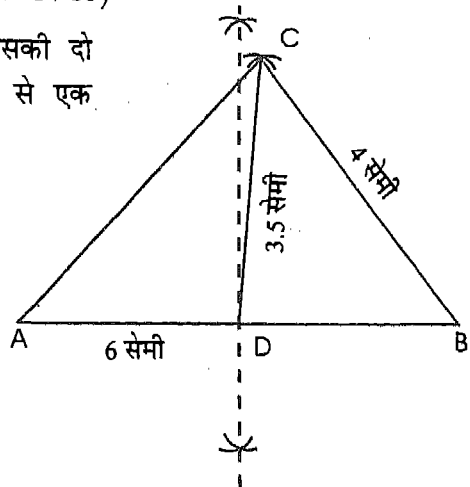
1. रेखाखण्ड $AB = c$ सेमी खीचिए।
2. AB को समद्विभाजित कीजिए। मान लीजिए D उसका मध्य बिन्दु है।
3. D को केन्द्र मानकर, d सेमी त्रिज्या का एक चाप खींचिए।
4. B को केन्द्र मानकर और a सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप खींचिए जो उपरोक्त चाप को किसी बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करे।
5. CA तथा CB को मिलाइए।

तब, ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.10)

उदाहरण 4: त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाऐं 6 सेमी तथा 4 सेमी हों और इनमें से एक भुजा की माध्यिका 3.5 सेमी हो।

आकृति 14.11

हल : हमें दिया है भुजा AB = 6 सेमी, BC = 4 सेमी तथा माध्यिका CD = 3.5 सेमी। अभीष्ट त्रिभुज ABC की रचना करना अभीष्ट है।

रचना के चरण

1. रेखाखण्ड AB = 6 सेमी खींचिए।
2. AB को समद्विभाजित कीजिए। मान लीजिए D उसका मध्य बिन्दु है।

3. D को केन्द्र मानकर और 3.5 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।
4. B को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप खींचिए जो उपरोक्त चाप को किसी बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करे।
5. CB और CA को मिलाइए।

ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.11)

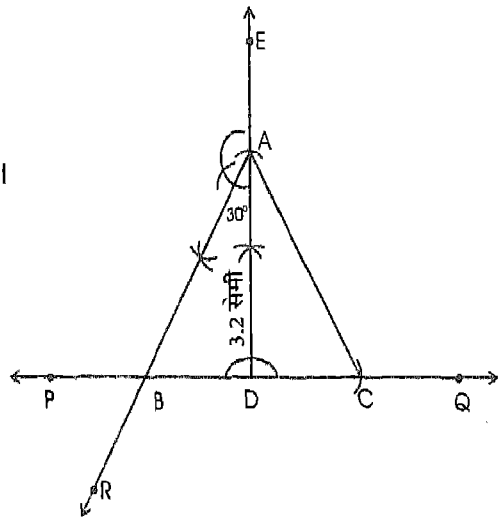
उदाहरण 5: समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका शीर्षलम्ब 3.2 सेमी है।

हल : समबाहु त्रिभुज के सभी शीर्षलम्ब समान लम्बाई के होते हैं। और ये शीर्षलम्ब ऐसे त्रिभुज की माध्यिकाएँ भी होती हैं। समबाहु त्रिभुज की माध्यिका AD = 3.2 सेमी दी गई है। हमें ΔABC की रचना करनी है।

रचना के चरण

1. रेखा PQ खीचिए।
2. उस पर कोई बिन्दु D लीजिए।
3. PQ के लम्ब किरण DE खींचिए।
4. DE से DA = 3.2 सेमी काटिए।
5. $\angle DAR = 30^0 (\frac{1}{2} \times 60^0)$ की रचना कीजिए।

   माना किरण AR, PQ को किसी बिन्दु B पर काटती है।
6. रेखाखण्ड DC = BD काटिए।
7. AC को मिलाइए।

ABC ही वांछित त्रिभुज है। (आकृति 14.12)

आकृति 14.12

प्रश्नावली 14.1

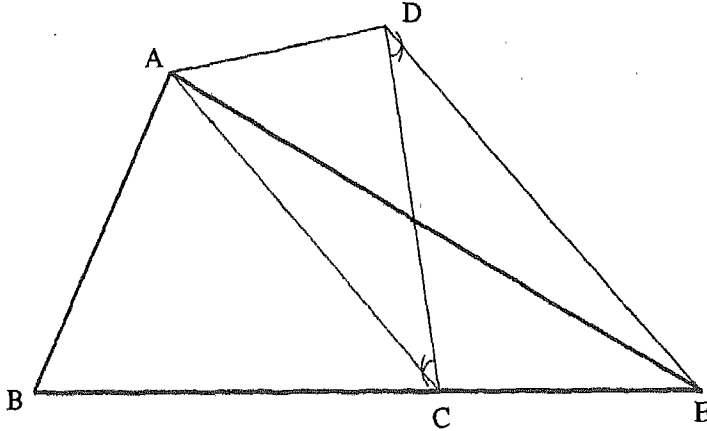
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें आधार $BC = 4.6$ सेमी $\angle B = 45^0$ तथा $AB + CA = 8.2$ सेमी।
2. समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जब उसकी एक भुजा 3.5 सेमी तथा दूसरी भुजा एवं कर्ण की लम्बाइयों का योग 5.5 सेमी है।
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें आधार $BC = 6.5$ सेमी, $CA + AB = 10$ सेमी और $\angle B = 60^0$ है।
4. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 4.5$ सेमी, $\angle B = 45^0$ तथा $AB - AC = 2.5$ सेमी है।
5. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 30^0$ तथा $AC - AB = 2$ सेमी है।
6. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसका परिमाप 12 सेमी $\angle B = 60^0$ तथा $\angle C = 45^0$ है।
7. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसका परिमाप 10 सेमी तथा प्रत्येक आधार कोण 45^0 का हो।
8. ऐसे त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 6$ सेमी, $AB = 6$ सेमी तथा माध्यिका $AD = 4$ सेमी हो।

14.4 चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना

इस परिच्छेद में हम यह अध्ययन करेंगे कि एक दिए हुए चतर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना किस प्रकार की जाती है। इस प्रक्रिया का अनुसरण कर हम क्रमशः पंचभुज के तुल्य चतुर्भुज, षटभुज के तुल्य पंचभुज, इत्यादि की रचना कर सकते है। अतः व्यापक रूप में यह विधि $(n-1)$ भुजाओं वाले बहुभुज, जो क्षेत्रफल में n भुजाओं वाले बहुभुज के समान हो, के रचना में उपयोगी है। अतः इस प्रक्रिया को बार-बार प्रयोग करने पर बहुभुज के क्षेत्रफल के बराबर त्रिभुज प्राप्त हो जाता है।

रचना 5 : एक त्रिभुज की रचना करना है जो क्षेत्रफल में दिए हुए चतुर्भुज के बराबर हो।

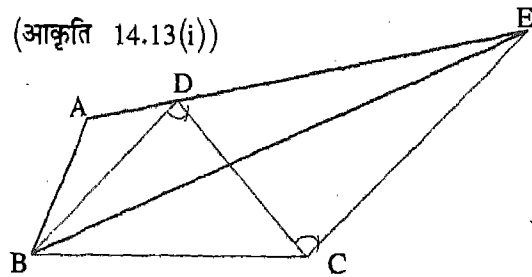
दिया है : एक चतुर्भुज ABCD

अभीष्ट है : त्रिभुज की रचना करना जो क्षेत्रफल में दिए हुए चतुर्भुज के बराबर हो।

आकृति 14.13 (i)

रचना के चरण

1. AC को मिलाइए।
2. D से, एक रेखाखण्ड DE, AC के समांतर खींचिए जो BC को किसी बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करता है।
3. AE को मिलाइए।

तब ABE अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.13(i))

टिप्पणी : उपरोक्त रचना में भुजा AB में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है। इसी प्रकार यदि आप BD को मिलाएँ तथा C से BD के समांतर एक रेखा खींचें जो AD के बढ़े भाग को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करे तो आपको दूसरा त्रिभुज ABE प्राप्त होगा जो क्षेत्रफल में दिए हुए चतुर्भुज के बराबर है। (आकृति 14.13 (ii))

आकृति 14.13 (ii)

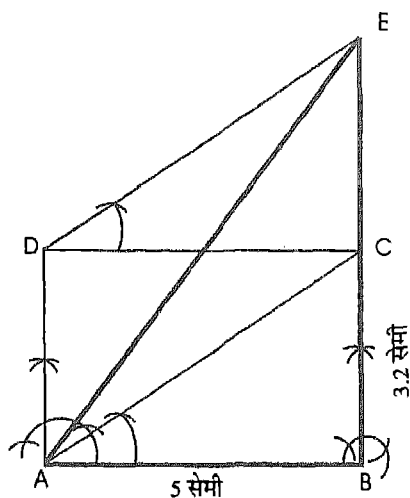
चतुर्भुज की अन्य भुजाओं के लिए भी इसी प्रकार की स्थिति हो सकती है। अतः दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर एक से अधिक त्रिभुज की रचना संभव है।

उदाहरण 6: आयत ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी तथा BC = 3.2 सेमी हो। दिए हुए आयत के बराबर, एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार AB है।

हल : सर्वप्रथम दिए गए आयत ABCD कि रचना कीजिए, जिसकी भुजा AB = 5 सेमी तथा BC = 3.2 सेमी है। आधार AB पर दिए हुए आयत के समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना करनी है।

रचना के चरण

1. आयत ABCD की रचना कीजिए।
2. AC को मिलाइए।
3. D से AC के समांतर DE खीचिए जो कि BC के बढ़े हुए भाग को बिन्दु E पर काटे।
4. AE को मिलाइए।

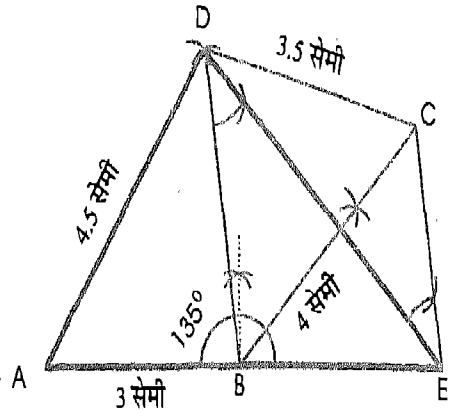
   तब ABC अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.14)

आकृति 14.14

नोट : अभीष्ट त्रिभुज ABC के बनाने का एक वैकल्पिक परन्तु सरल तरीका यह है कि BC को बिन्दु E तक इस प्रकार बढ़ाइए जिससे BC = CE = 3.2 सेमी हो तब AE को मिला दीजिए।

उदाहरण 7: चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 3.5 सेमी, DA = 4.5 सेमी तथा $\angle B = 135^0$ हो इस चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल का त्रिभुज बनाइए।

हल : सर्वप्रथम दिए हुए चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 3.5 सेमी, DA = 4.5 सेमी तथा $\angle B = 135^0$ है। इस चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर के त्रिभुज की रचना करनी है।

रचना के चरण

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए।
2. BD को मिलाइए
3. शीर्ष C से, CE||DB खींचिए जो AB के विस्तार को किसी बिन्दु E पर काटती है।
4. DE को मिलाइए।

आकृति 14.15

तब DAE अभीष्ट त्रिभुज है। (आकृति 14.15)

प्रश्नावली 14.2

1. ABCD एक चतुर्भुज दिया है जिसमें AB = 3.6 सेमी, BC = 7.7 सेमी, CD = 6.8 सेमी, DA = 5.1 सेमी तथा AC = 8.5 सेमी है। ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जो क्षेत्रफल में इस चतुर्भुज के बराबर हो।

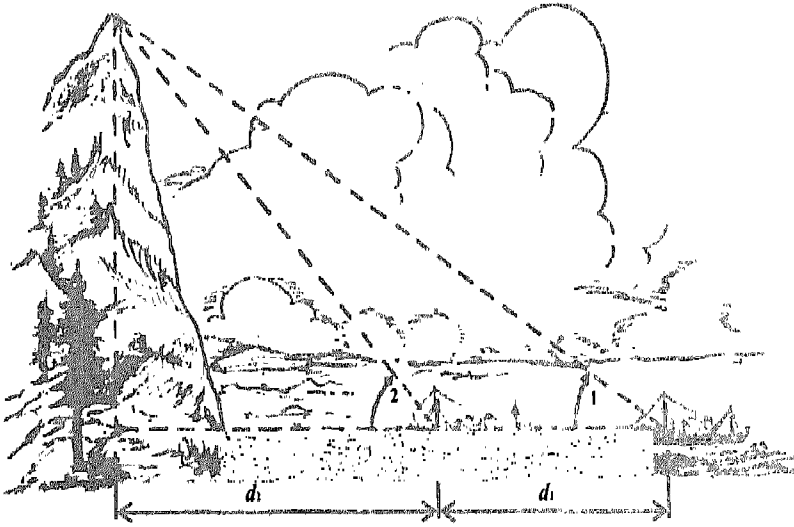
2. ABCD एक चतुर्भुज दिया है जिसमें AB = 6.3 सेमी, BC = 5.2 सेमी, CD = 5.6 सेमी, DA = 7.1 सेमी तथा $\angle B = 60^0$ है। ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जो क्षेत्रफल में इस चतुर्भुज के बराबर हो।

3. एक चतुर्भुज ABCD दिया है जिसमें AB = 7 सेमी, BC = 6 सेमी, CD = 5 सेमी, AC = 8 सेमी तथा BD = 9 सेमी है। आधार AB पर एक त्रिभुज की रचना कीजिए जो क्षेत्रफल में इस चतुर्भुज के बराबर हो।

अध्याय 15

[illegible]

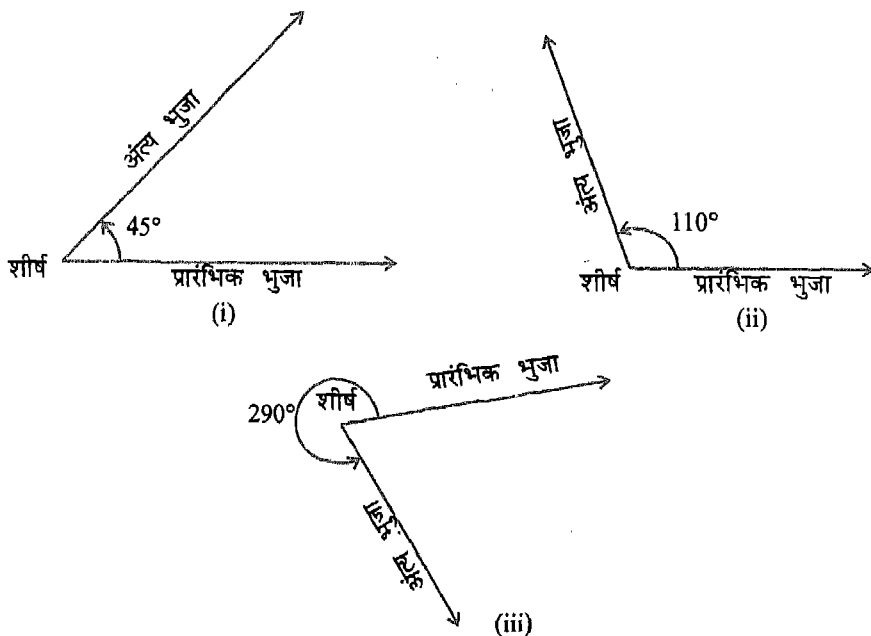
15.1 भूमिका

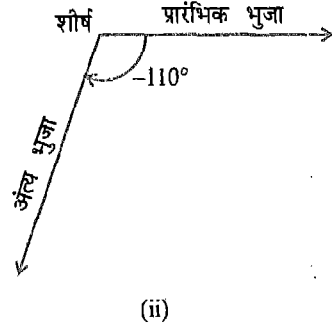
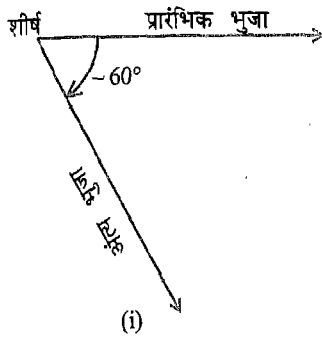
इस अध्याय में हम गणित की एक प्रमुख शाखा, जिसे त्रिकोणमिति (Trigonometry) कहते हैं, का अध्ययन करेंगे जिसका प्रारंभ सदियों पूर्व हुआ था। शब्द Trigonometry यूनानी भाषा के तीन शब्दों 'ट्रि' (tri), 'गान' (gon) एवं 'मेट्रन' (metron) के संयोजन से बना है। 'ट्रि' का अर्थ है तीन, 'गान' का अर्थ है भुजाएं एवं 'मेट्रन' का अर्थ है मापना। अत: त्रिकोणमिति के अन्तर्गत एक त्रिभुज की भुजाओं (एवं कोणों) का मापन किया जाता है। यदि एक त्रिभुज की कुछ भुजाएँ और कोण ज्ञात हों तो त्रिकोणमिति की सहायता से शेष भुजाओं एवं कोणों को ज्ञात किया जा सकता है। त्रिकोणमिति के ज्ञान का सर्वाधिक उपयोग खगोलशास्त्र में खगोलीय पिंडों की स्थिति एवं उनके पथों को ज्ञात करने में किया जाता है। इसके अतिरिक्त सर्वेक्षण, भूगोल,

आकृति 15.1

नौसंचालन, भौतिकीय एव इंजिनियरिंग विज्ञान में भी यह उपयोगी है। जहाज के कप्तान त्रिकोणमिति के ज्ञान का उपयोग द्वीपों, समुद्री किनारों, भृगुओं (Cliffs) तथा अन्य जहाजों से समुद्र में दूरी मापने में करते थे (आकृति 15.1)। $\angle 1$ एवं $\angle 2$ तथा जहाजों की दो स्थितियों के बीच की दूरी d_1 ज्ञात होने पर कप्तान पहाड़ी की चोटी की ऊँचाई एवं दूरी d_2 को भी ज्ञात कर सकता था।

त्रिकोणमिति के अध्ययन हेतु हमें कोण की धारणा को पुनः दोहराना होगा, तब हम समकोण त्रिभुज की भिन्न भुजाओं के परस्पर अनुपातों को सीखेंगे, जिन्हें त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।

15.2 कोण-पुनरावलोकन

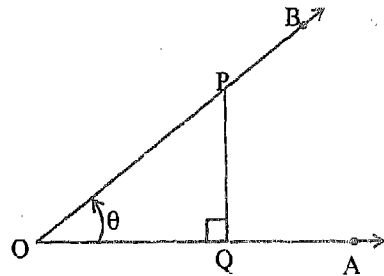
कोण वह आकृति है जिसे एक उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु वाली दो किरणें बनाती हैं। उन दो किरणों को कोण की भुजाएं (arms), उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिन्दु को शीर्ष (vertex) कहते हैं। उन किरणों में से एक को हम कोण की *प्रारंभिक भुजा* तथा दूसरे को *अंत्य भुजा* (आकृति 15.2) कहेंगे।

आकृति 15.2

ध्यान रहे कि इन सभी आकृतियों में प्रारंभिक भुजा से अंत्य भुजा की ओर किरण का घूर्णन, *वामावर्त* (anticlockwise) दिशा में होता है। पिछली कक्षाओं से हमें ज्ञात है कि इस प्रकार के घूर्णन से प्राप्त कोणों के मापों को धनात्मक कहते हैं। उदाहरण के लिए आकृति 15.2(i) में दिए कोण का माप 45° (अर्थात् +45°) है। इसी प्रकार आकृति 15.2 (ii) एवं आकृति 15.2 (ii) के कोणों की माप क्रमशः 110° एवं 290° हैं। लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि किरण का घूर्णन हमेशा वामावर्त दिशा में हो। यह *दक्षिणावर्त* (clockwise) दिशा में भी हो सकता है जैसा कि आकृति 15.3 में दर्शाया गया है।

आकृति 15.3

हमने वामावर्त घूर्णन से प्राप्त कोणों के मापों को *धनात्मक* माना है, अतः यह स्वाभाविक है कि दक्षिणावर्त घूर्णन में बने कोणों के मापों को *ऋणात्मक* कहें। अतः *आकृति 15.3(i) के कोण का माप –60° है एवं आकृति 15.3(ii) के कोण का* माप –110° है।

इस अध्याय में हम केवल धनात्मक न्यून कोणों से संबंध रखेंगे।

15.3 कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

हम कोई भी न्यून कोण AOB (आकृति 15.4) लेते हैं। किरण OB पर हम एक बिन्दु P लेते हैं, तथा OA पर PQ लम्ब खींचते हैं। हम कोण POQ को ग्रीक अक्षर θ (थीटा) से दर्शाते हैं। तब हमें समकोण त्रिभुज POQ प्राप्त होता है, जिसमें $\angle QOP = \theta$ हैं।

आकृति 15.4

ध्यान रहे कि त्रिभुज POQ का आधार OQ है, जो कि कोण θ की *आसन्न भुजा* है, तथा कोण की सम्मुख भुजा, PQ *लंब* है। OP त्रिभुज का *कर्ण* है। यहां θ अंशों में मापा गया है।

समकोण त्रिभुज POQ की भुजाओं की लम्बाइयों का उपयोग करते हुए, कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों को हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$\text{sine } \theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{OP}$$

$$\text{cosine } \theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{OQ}{OP}$$

$$\text{tangent } \theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{PQ}{OQ}$$

उपरोक्त तीन अनुपातों को संक्षिप्त करके हम क्रमशः $\sin\theta$, $\cos\theta$ एवं $\tan\theta$ से निरूपित करेंगे।

टिप्पणी :

1. ध्यान रहे कि $\sin\theta$, sine θ का संक्षिप्त रूप है एवं यह sin और θ का गुणनफल नहीं है। इसी प्रकार $\cos\theta$ एवं $\tan\theta$ के लिए भी यह लागू होता है।
2. यदि किरण OB पर बिंदु P की स्थिति हम बदल दें, तो क्या होगा? ध्यान दीजिए कि ∠QOP का माप वही रहेगा यद्यपि लंबाइयाँ PQ एवं OP बदल जायेंगी, लेकिन अनुपात $\frac{PQ}{OP}$ पहले के समान ही रहेगा। आप इसे बाद में त्रिभुजों की समरूपता का अध्ययन करने के पश्चात् सिद्ध कर सकेंगे। $\sin\theta$ के तरह, कोण θ के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के भी मान वही रहेंगे, अर्थात् ये किरण OB पर P की स्थिति से स्वतंत्र होंगे। यदि कोण θ स्वयं बदलता है, तब इन अनुपातों के मान भी बदल जाते हैं।

3. यहां ध्यान दें कि

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$$

$$= \frac{PQ}{OP}\cdot\frac{OP}{OQ} = \frac{PQ}{OP} / \frac{OQ}{OP} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

15.4 अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात

sine, cosine एवं tangent के अतिरिक्त कोण θ के तीन अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात भी होते हैं, जिनके नाम cosecant (संक्षिप्त में cosec), secant (संक्षिप्त में sec) एवं cotangent (संक्षिप्त में cot) हैं। हम इन्हें निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं (आकृति 15.4) :

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{OP}{PQ} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{1}{\tan\theta}$$

ध्यान दीजिए कि $\text{cosec}\,\theta$, $\sec\theta$ एवं $\cot\theta$ क्रमशः $\sin\theta$, $\cos\theta$ एवं $\tan\theta$ के व्युत्क्रम हैं। सुविधा के लिए हम $(\sin\theta)^2, (\cos\theta)^2, (\tan\theta)^2$ आदि के स्थान पर क्रमशः $\sin^2\theta, \cos^2\theta, \tan^2\theta$ आदि का प्रयोग करते हैं। ध्यान रहे कि हम $\text{cosec}\,\theta$ को $(\sin\theta)^{-1}$ लिखते हैं, न कि $\sin^{-1}\theta$, जिसका अर्थ भिन्न है (sine व्युत्क्रम θ)। अत: एक कोण θ के छः त्रिकोणमितीय अनुपात होते हैं। यदि इन में से कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो शेष सभी अनुपातों का परिकलन किया जा सकता है। हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देंगे :

उदाहरण 1 : यदि $\sin = \frac{3}{5}$, तो कोण θ के अन्य पांच त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : हम एक समकोण त्रिभुज ABC इस प्रकार बनाते हैं कि

$$\sin = \frac{3}{5}$$ (आकृति 15.5 देखें)

अत: लंब (CB) एवं कर्ण (AC)

3:5 के अनुपात में है। इसलिए मान लीजिए

$BC = 3k$ एवं $AC = 5k$, जहाँ $k > 0$,

आनुपातिकता का अचर (constant of proportionality) है।

पाइथागोरस प्रमेय से

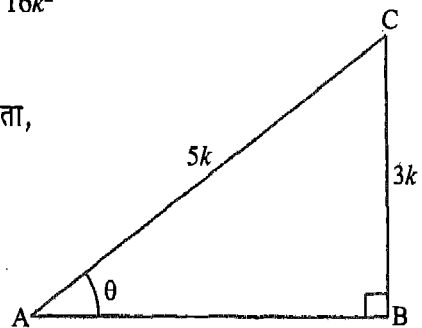
$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (5k)^2 - (3k)^2 = 16k^2$$

$$\therefore \quad AB = \pm 4k$$

क्योंकि AB का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता,

इसलिए $AB = 4k$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

आकृति 15.5

अब, $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

उदाहरण 2 : यदि त्रिभुज ABC का कोण C समकोण हो, तो $\sin B$, $\cos B$ एवं $\tan B$ के मान ज्ञात कीजिए। (आकृति 15.6)

हल : ΔABC ऐसा त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(25)^2 - (24)^2}$$

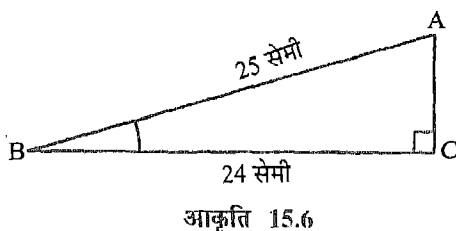
$$= \sqrt{49}$$

$$= 7$$

आकृति 15.6

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{24}$$

उदाहरण 3 : यदि $\tan\theta = \frac{12}{5}$, तो $\sin\theta$ एवं $\cos\theta$ ज्ञात कीजिए, तथा सत्यापित कीजिए कि

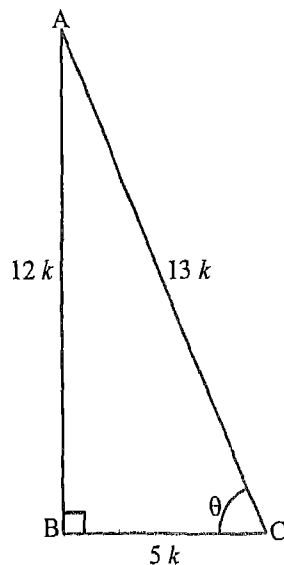
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

हल : $\tan\theta = \frac{12}{5}$ (दिया है)

अतः, लंब एवं आधार 12:5 के अनुपात में हैं। हम एक समकोण त्रिभुज ABC लेते हैं, जिसमें $\angle C = \theta$ है (आकृति 15.7)। मान लो $AB = 12k$ एवं $BC = 5k$ जहाँ k आनुपातिकता का अचर है।

आकृति 15.7

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = (12k)^2 + (5k)^2 = 169k^2$$

अर्थात् $AC = 13k$

अतः $\sin\theta = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$

एवं $\cos\theta = \frac{5}{13}$

$$\therefore \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

इस प्रकार, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

उदाहरण 4 : त्रिभुज ABC का कोण C समकोण है। यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो दर्शाइए कि $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$.

हल : हम एक ऐसा समकोण त्रिभुज ABC बनाते हैं कि

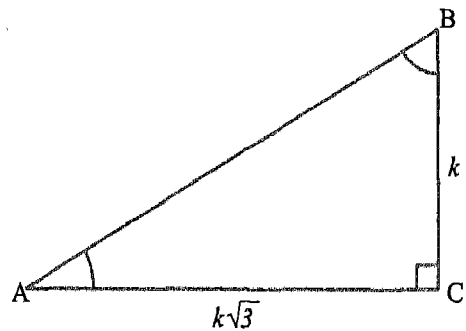
$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (आकृति 15.8)

मान लो $BC = k$, तब $AC = k\sqrt{3}$

अब $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$

$$= \sqrt{k^2 + (k\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4k^2}$$

$$= 2k$$

आकृति 15.8

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}, \ \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \ \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

अत: $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$

प्रश्नावली 15.1

1. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$, तो $\sin\theta$ एवं $\tan\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\cot\theta = \frac{20}{21}$, तो $\cos\theta$ एवं $\mathrm{cosec}\,\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\sec\theta = \frac{25}{7}$ तो $\tan\theta$ एवं $\mathrm{cosec}\,\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{41}{40}$ तो $\sin\theta$ एवं $\sec\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. ΔABC में, $\angle B$ समकोण है। यदि $AB = 12$ सेमी एवं $BC = 5$ सेमी, तो निम्न के मान निकालिए

   (i) $\sin A$ एवं $\tan A$

   (ii) $\sin C$ एवं $\cot C$

7. त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। यदि $AB = 4$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, तो कोण A के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात कीजिए।

8. ΔABC में $\angle A$ समकोण हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक में $\sin B, \cos C$ एवं $\tan B$ ज्ञात कीजिए :

   (i) $AB = AC = 1$ सेमी

   (ii) $AB = 5$ सेमी, $BC = 13$ सेमी

   (ii) $AB = 20$ सेमी, $AC = 21$ सेमी

9. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\sin\theta - \cot\theta}{2\tan\theta}$$

10. दिया है कि $\cos\theta = \frac{21}{29}$, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\sec\theta}{\tan\theta - \sin\theta}$$

11. $\frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}{2\cot\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ हो।

12. यदि $\cos\theta = \frac{p}{q}$, तो $\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$, तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का परिकलन कीजिए।

14. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$, तो दर्शाइए कि

$$\frac{\tan A}{1 + \tan^2 A} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

15. यदि $\operatorname{cosec} A = 2$ तो $\cot A + \frac{\sin A}{1 + \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\sec\theta = \frac{5}{4}$, तो सत्यापित कीजिए कि

$$\frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\sec\theta}$$

17. यदि $\cot B = \frac{12}{5}$ तो दर्शाइए कि

$$\tan^2 B - \sin^2 B = \sin^2 B \tan^2 B$$

18. यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{3\sin\theta + 2\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$$

(संकेत : अंश एवं हर को $\cos\theta$ से भाग दीजिए)

19. यदि $\tan\theta = \frac{a}{b}$, तो व्यंजक $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

20. यदि $\tan\theta = 2$, तो $\sin\theta\sec\theta + \tan^2\theta - \operatorname{cosec}\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

21. यदि $\sec\theta = \frac{5}{4}$, तो $\frac{\sin\theta - 2\cos\theta}{\tan\theta - \cot\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो दर्शाइए कि

$$\frac{1 - \cos^2\theta}{2 - \sin^2\theta} = \frac{3}{5}$$

23. यदि $\sec = \frac{13}{5}$, तो दर्शाइए कि

$$\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$$

24. यदि $\sin B = \frac{1}{2}$, तो दर्शाइए कि

$$3\cos B - 4\cos^3 B = 0$$

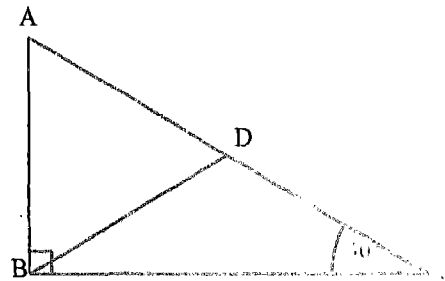
15.5 कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

ज्यामिति में 30°, 45° एवं 60° के कोणों की रचना से हम पूर्व परिचित हैं। इस अनुच्छेद में हम इन कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का परिकलन करना सीखेंगे।

30° के त्रिकोणमितीय अनुपात

मान लीजिए कि त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है, तथा $\angle C = 30°$ है। मान लीजिए कि AC का मध्यबिंदु D है। BD को मिलाइए। (आकृति 15.9)

आकृति 15.9

मान लीजिए कि $AB = a$ है। क्योंकि समकोण त्रिभुज के कर्ण के मध्य बिंदु को शीर्ष से मिलाने वाला रेखाखण्ड कर्ण का आधा होता है। इसलिए $AD = BD = CD$

$\angle BAD = \angle ABD = 60°$

$\angle ADB = 180° - (60° + 60°) = 60°$

$\therefore$ ΔABD समबाहु है एवं

$AD = BD = AB = a$

अब $AC = 2AD = 2a$

$\therefore$ $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\therefore$ $BC = a\sqrt{3}$

$$\sin 30° = \frac{30° \text{ कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{30° \text{ कोण की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{30° \text{ कोण की सम्मुख भुजा}}{30° \text{ कोण की आसन्न भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$$

60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

आकृति 15.9 को पुनः देखिए। ΔABC में $\angle A = 60^0$

$$\therefore \quad \sin 60° = \frac{60° \text{ कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{60° \text{ कोण की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{60° \text{ कोण की सम्मुख भुजा}}{60° \text{ कोण की आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\text{cosec } 60° = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = 2$$

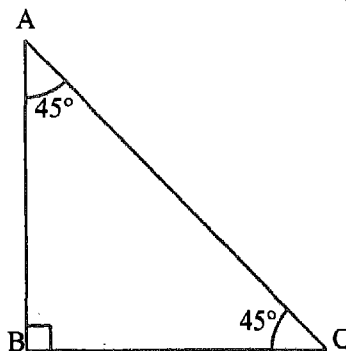
$$\cot 60° = \frac{1}{\tan 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

45° के त्रिकोणमितीय अनुपात

मान लीजिए कि त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है, तथा $\angle A = \angle C = 45°$ (आकृति 15.10)। और

$$AB = BC = a$$

तब $\quad AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\therefore \quad AC = a\sqrt{2}$

आकृति 15.10

क्योंकि समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle C = 45^0$ अत:

$$\sin 45^0 = \frac{45^0 \text{ कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{45^0 \text{ कोण की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^0 = \frac{45^0 \text{ कोण की सम्मुख भुजा}}{45^0 \text{ कोण की आसन्न भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{cosec } 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = 1$$

0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने $\sin\theta$ और $\cos\theta$ इत्यादि को न्यून कोण θ, जहाँ $0^0 < \theta < 90^0$, के लिए परिभाषित किया है।

यदि $\theta = 0^\circ$ या $\theta = 90^\circ$ हो, तो हम इन के लिए अलग से परिभाषा देते हैं:

(a) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ = 0$, $\sec 0^\circ = 1$;
$\text{coses } 0^\circ$ एवं $\cot 0^\circ$ *परिभाषित नहीं* हैं।

(b) $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\text{cosec } 90^\circ = 1$, $\cot 90^\circ = 0$
$\sec 90^\circ$ एवं $\tan 90^\circ$ *परिभाषित नहीं* हैं।

आइए अब हम $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ और 90° के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को एक साथ एक सारणी के रूप में प्रस्तुत करें।

θ	sin θ	cos θ	tan θ	cosec θ	sec θ	cot θ
0°	0	1	0	परिभाषित नहीं	1	परिभाषित नहीं
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	परिभाषित नहीं	1	परिभाषित नहीं	0

टिप्पणी : उपरोक्त सारणी को ध्यान से देखने पर हमें ज्ञात होता है कि

1. θ का मान बढ़ने पर $\sin\theta$ का मान बढ़ता जाता है। यहां $\sin\theta$ का न्यूनतम मान 0 है एवं अधिकतम मान 1 है।
2. θ का मान बढ़ने पर $\cos\theta$ का मान कम होता जाता है। यहां भी $\cos\theta$ के न्यूनतम एवं अधिकतम मान क्रमशः 0 एवं 1 है।
3. θ के साथ $\tan\theta$ भी बढ़ता जाता है, किंतु $\tan 90^0$ परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 5 : $2\sin^2 30^0 \tan 60^0 - 3\cos^2 60^0 \sec^2 30^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\tan 60^0 = \sqrt{3}$ एवं $\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $$2\sin^2 30^0 \tan 60^0 - 3\cos^2 60^0 \sec^2 30^0$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{3} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

उदाहरण 6 : सत्यापित कीजिए कि

$$\cos 60^0 \cos 30^0 - \sin 60^0 \sin 30^0 = \cos 90^0$$

हल : हम जानते हैं $\cos 60^0 = \frac{1}{2}, \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^0 = \frac{1}{2}, \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

वाम पक्ष = $\cos 60^0 \cos 30^0 - \sin 60^0 \sin 30^0$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

दक्षिण पक्ष $\cos 90^0 = 0$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

उदाहरण 7 : यदि $\sin(A+B) = 1$ एवं $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0^0 \angle A+B \leq 90^0$ तथा $A > B$, तो A और B ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि, $\sin(A+B) = 1$

$\therefore$ $A + B = 90^0$ (क्यों?) (1)

$$\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ $A - B = 30^0$ (2)

(1) एवं (2) समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$A = 60^0 \text{ और } B = 30^0$$

प्रश्नावली 15.2

1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

(ii) $\cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$

(iii) $\tan^2 60^\circ + 4 \cos^2 45^\circ + 3 \sec^2 30^\circ + 5 \cos^2 90^\circ$

(iv) $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ$

(v) $\operatorname{cosec}^2 30^\circ \sin 45^\circ - \sec^2 60^\circ$

(vi) $\dfrac{\sin 60^0}{\cos^2 45^0} + 5 \cos 90^\circ - \cot 30^\circ$

(vii) $\dfrac{\tan 45^0}{\sin 30^0 + \cos 30^0}$

(viii) $\dfrac{\tan 60^0}{\sec 60^0 + \operatorname{cosec} 60^0}$

(ix) $\dfrac{5 \sin^2 30^0 + \cos^2 45^0 + 4 \tan^2 60^0}{2 \sin 30^0 \cos 60^0 + \tan 45^0}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सत्यापित कीजिए :

(i) $\cos 60^\circ = 1 - 2 \sin^2 30^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$

(ii) $\cos 90^\circ = 1 - 2 \sin^2 45^\circ = 2 \cos^2 45^\circ - 1$

(iii) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$

(iv) $\dfrac{\tan 60^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 60^0 \tan 30^0} = \tan 30^0$

(v) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

(vi) $1 + \cot^2 30^\circ = \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

(vii) $\dfrac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1 + \sin 30^0 + \cos 60^0} = \cos 30^0$

(viii) $\dfrac{\sin 60^0}{1 + \cos 60^0} = \tan 30^0$

3. दर्शाइए :

(i) $\sin^2 45^0 + \sin^2 30^0 + \sin^2 60^0 = \frac{3}{2}$

(ii) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$

(iii) $2 \sin^2 60^0 \cos 60^0 = \frac{3}{4}$

(iv) $\cos^2 30^0 + \sin 30^0 + \tan 45^0 = 2\frac{1}{4}$

4. दिया है कि $A = 30^0$, तो सत्यापित कीजिए :

(i) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

(ii) $\sin A = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}}$

(iii) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(iv) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(v) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$

(vi) $\tan\theta = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

(vii) $\sin\theta = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$

(viii) $\tan\theta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A}$

5. यदि $(A + B) = 1$ एवं $\cos(A - B) = 1$, तो A और B ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ तो A और B ज्ञात कीजिए।

7. यदि $\cos(40° + x) = \sin 30°$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

15.6 समकोण त्रिभुजों के हल

किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं एवं तीन कोण उसके अवयव कहलाते हैं। दिए हुए अवयवों की सहायता से अज्ञात अवयवों को ज्ञात कर लेने की प्रक्रिया को *त्रिभुज को हल करना* कहते हैं। अब हम समकोण त्रिभुजों को हल करने के प्रश्नों पर ध्यान देंगे। किसी समकोण त्रिभुज में यदि समकोण के अतिरिक्त एक भुजा और दूसरा अवयव (अर्थात् भुजा या कोण) ज्ञात हो, तो हम त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग करके शेष अवयवों को ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी : किसी समकोण त्रिभुज को हल करने के प्रयास में सर्वप्रथम हम एक आकृति बना लें एवं दिए हुए अवयवों को चिह्नित करें। इससे शेष अवयवों को ज्ञात करने में सहायता मिलती है।

हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान देते हैं :

उदाहरण 8 : ΔABC का $\angle B$ समकोण है। $AB = 6$ एवं कोण $\angle C = 30^\circ$, तो AC, एवं BC ज्ञात कीजिए (आकृति 15.11)

हल : AC *को ज्ञात करने के लिए*

$$\frac{AB}{AC} = \sin C = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

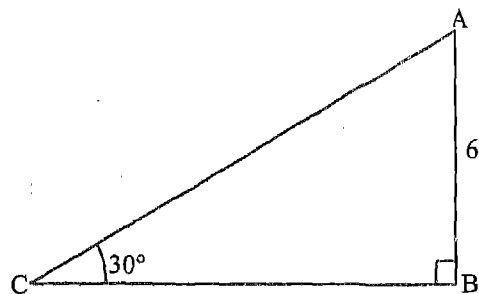
या $$\frac{6}{AC} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$AC = 12$$

BC *को ज्ञात करने के लिए*

$$\frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$\frac{6}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $$B = 6\sqrt{3}$$

आकृति 15.11

टिप्पणी : उपरोक्त त्रिभुज में दो कोण ज्ञात हैं जो 30° एवं 90° के हैं। तीसरा कोण 60° का होगा। अतः *तीन कोण* एवं *तीन भुजाएँ* निम्न हैं :

$\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$; $AB = 6$, $AC = 12$, $BC = 6\sqrt{3}$

उदाहरण 9 : त्रिभुज PQR में कोण Q समकोण है। यदि PR = 10 सेमी, PQ = 5 सेमी, तो शेष अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हल : PQR समकोण त्रिभुज है। (आकृति 15.12)

$$\sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{10}$$

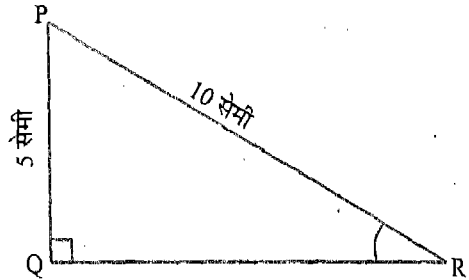
या $\sin R = \frac{1}{2}$

∴ $\angle R = 30^0$ (क्योंकि $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$)

अब $\angle P = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$$\frac{PQ}{QR} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $\frac{5}{QR} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $QR = 5\sqrt{3}$ सेमी

आकृति 15.12

प्रश्नावली 15.3

1. त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है। यदि $\angle A = 30^0$, AB = 12 सेमी, तो BC और AC ज्ञात कीजिए।

2. त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है। त्रिभुज के शेष अवयव ज्ञात कीजिए :

   (i) $\angle C = 45^\circ$, AB = 5 सेमी

   (ii) $\angle A = 30^\circ$, AC = 8 सेमी

   (iii) $\angle C = 60^\circ$, BC = 3 सेमी

   (iv) $\angle C = 60^\circ$, AC = 5 सेमी

   (v) $\angle A = 45^\circ$, BC = 7.5 सेमी

   (vi) $\angle A = 60^\circ$, AB = 11 सेमी

3. त्रिभुज PMO में कोण M समकोण है। निम्नलिखित स्थितियों में शेष अवयव ज्ञात कीजिए :

(i) $PM = 3$ सेमी, $OP = 6$ सेमी

(ii) $PM = 5$ सेमी, $OP = 5\sqrt{2}$ सेमी

(iii) $PM = 8$ सेमी, $OP = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ सेमी

(iv) $OM = 4$ सेमी, $OP = 8$ सेमी

(v) $PM = 5$ सेमी, $OM = 5$ सेमी

अध्याय 16

समतल आकृतियों का मेन्सुरेशन

16.1 भूमिका

हमारे समक्ष दैनिक कार्यक्षेत्र में ऐसी भी स्थितियां आती हैं जब विभिन्न वस्तुओं के मापों की आवश्यकता होती है जैसे

(i) भूखण्ड का क्षेत्रफल

(ii) कमरे की पुताई कराने के लिए उसके छत तथा चारों दीवारों का क्षेत्रफल तथा सीमेंट कराने के लिए फर्श का क्षेत्रफल

(iii) किसी क्षेत्र को घेरने के लिए आवश्यक कटीले तार की लम्बाई

(iv) कपड़े के मेज़पोश का क्षेत्रफल जबकि मेज़ के चारों तरफ लटकने वाले कपड़े की लम्बाई ज्ञात हो

(v) बोतलों तथा धारित्रों की धारितायें

(vi) तम्बू बनाने के लिए आवश्यक कपड़ा, इत्यादि।

ये सभी कार्यकलाप किसी न किसी प्रकार से समतल आकृतियों के परिमाप तथा क्षेत्रफल अथवा ठोस के पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतनों से संबंधित हैं। गणित की उस शाखा को जो समतल तथा ठोस आकृतियों की लम्बाई, क्षेत्रफल तथा आयतन के परिमापों से सम्बन्धित है *मेन्सुरेशन* (क्षेत्रमिति) कहते हैं। इस अध्याय में हम समतल आकृतियों के परिमाप तथा क्षेत्रफल को ज्ञात करने तक ही अपने को सीमित रखेंगे। पिछली कक्षाओं में हम कुछ समतल आकृतियों के क्षेत्रफल तथा कुछ ठोस के आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल के बारे में पढ़ चुके हैं। आइये नीचे दी हुई सारिणी से हम समतल आकृतियों के क्षेत्रफल का पुनरावलोकन कर लें।

स्मरण रखना है कि समतल आकृतियां वह हैं जो एक समतल में बनाई जाती हैं जैसे कि त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि। आप कुछ समतल आकृतियों की

सारिणी 16.1

क्रमांक	नाम	आकृति	परिमाप लम्बाई के इकाई में	क्षेत्रफल वर्ग इकाई में	नामकरण
1.	त्रिभुज		$a + b + c$, या 2s	$\frac{1}{2}ch$	a, b, c, भुजाएं हैं h - ऊँचाई अर्ध-परिमाप $s = \frac{a+b+c}{2}$
2.	समकोण त्रिभुज		$b + h + d$	$\frac{1}{2}bh$	$d = \sqrt{b^2 + h^2}$ (कर्ण)
3.	समद्विबाहु समकोण त्रिभुज		$2a + d$	$\frac{1}{2}a^2$	$d = a\sqrt{2}$ (कर्ण)
4.	समबाहु त्रिभुज		$3a$	$\frac{1}{2}ah$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (ऊंचाई)
5.	आयत		$2(a + b)$	ab	a - लम्बाई b - चौड़ाई
6.	वर्ग		$4a$	a^2	a - भुजा
7.	समांतर चतुर्भुज		$2(a + b)$	ah	a - भुजा b - भुजा h - समांतर भुजाओं a के बीच की दूरी
8.	समचतुर्भुज		$4a$	$\frac{1}{2}d_1d_2$	a - भुजा d_1, d_2 विकर्ण हैं
9.	समलम्ब		----	$\frac{1}{2}(a + b)h$	a, b - समांतर भुजायें h - उनके बीच की दूरी
10.	वृत		$2\pi r$	πr^2	r-त्रिज्या

विशेषताएं पढ़ चुके हैं तथा उनके क्षेत्रफल और परिमाप निकाल चुके हैं। आपको इन परिणामों की इस पाठ में आवश्यकता पड़ेगी। अतः सारिणी 16.1 की सहायता से उनको स्मरण कर डालिए।

16.2 बहुभुज

समतल आकृति को जो n रेखाखण्डों से परिबद्ध (घिरा) हो *n-भुजाओं वाला बहुभुज* कहते हैं। इस प्रकार त्रिभुज तीन भुजाओं वाला बहुभुज, चतुर्भुज चार भुजाओं वाला बहुभुज, पंचभुज तथा षटभुज क्रमशः पांच भुजाओं तथा छः भुजाओं वाले बहुभुज हैं।

यदि बहुभुज की सभी भुजायें तथा कोण बराबर हों तो उसे *समबहुभुज* कहते हैं। समबहुभुज की विशेषता है कि

(i) उसके अन्तर्गत एक वृत्त बना सकते हैं, तथा

(ii) उसके परिगत एक वृत्त खींच सकते हैं।

समबहुभुज का केन्द्र उसके अन्तर्गत एवं बहिर्गत वृत्तों के केन्द्र, एक ही बिन्दु होते हैं।

16.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल

आप पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ (\text{भुजा} \times \text{भुजा के संगत ऊंचाई})$$

अतः यदि ΔABC के आधार BC के संगत ऊंचाई AL हो (आकृति 16.1), तो

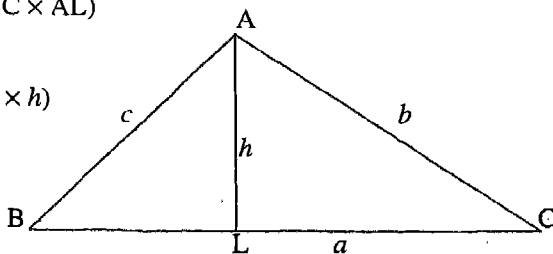
$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}(BC \times AL)$$

$$= \frac{1}{2}(a \times h)$$

जहाँ $BC = a$ और $AL = h$

A, B, C, L, a, b, c, h

आकृति 16.1

क्या अन्य विधियां भी हैं जिससे किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? अलेक्जेंड्रिया के

हिरोन ने, त्रिभुज के क्षेत्रफल को निकालने के लिए, जबकि उसकी सभी भुजायें दी हों, एक सूत्र दिया था, जिसको कि हीरो का सूत्र कहते हैं। अब हम इस सूत्र का कथन तथा उसकी उपयोगिता दे रहे हैं।

हीरो का सूत्र :

ΔABC का क्षेत्रफल, जिसमें $AB = c, BC = a$ तथा $CA = b$

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

होता है, जहाँ त्रिभुज का क्षेत्रफल प्रदर्शित करता है तथा

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$ त्रिभुज का अर्ध-परिमाप है।

आइए कुछ उदाहरणों से सूत्र को समझें :

उदाहरण 1 : त्रिभुज का परिमाप तथा क्षेत्रफल निकालिए जिसकी भुजाओं की लम्बाई 13 सेमी, 14 सेमी तथा 15 सेमी है।

हल : त्रिभुज का परिमाप $(2s) = 13 + 14 + 15 = 42$ सेमी,

अर्ध-परिमाप $(s) = 13 + 14 + 15$ या $\frac{1}{2} \times 42$ सेमी $= 21$ सेमी

हीरो सूत्र का प्रयोग करने पर, हमको त्रिभुज का क्षेत्रफल प्राप्त होगा,

$$\Delta = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$$

$$= 84 \text{ सेमी}^2$$

अत:, त्रिभुज का क्षेत्रफल 84 सेमी^{2} है।

उदाहरण 2 : हीरो के सूत्र का प्रयोग कर, भुजा a के समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए।

हल : चूंकि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है अत:

$$\therefore \quad s = \frac{3a}{2}$$

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{3a}{2}(\frac{3a}{2}-a)(\frac{3a}{2}-a)(\frac{3a}{2}-a)}$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

आपको स्मरण होगा कि भुजा a के समबाहु त्रिभुज का यही क्षेत्रफल होता है।

उदाहरण 3: एक समकोण त्रिभुज की परिमाप 12 सेमी है और उसके कर्ण की लम्बाई 5 सेमी है। अन्य दोनों भुजाओं को ज्ञात कीजिए तथा उसके क्षेत्रफल की गणना कीजिए। हीरो के सूत्र का उपयोग कर परिणाम की पुष्टि कीजिए।

हल : माना ABC दिया हुआ समकोण त्रिभुज है। (आकृति 16.2)

माना $AC = b$ सेमी तथा $BC = a$ सेमी है।

तब त्रिभुज का क्षेत्रफल $(\frac{1}{2}ab)$ सेमी^{2} है।

पुनः $a + b + 5 = 12$ या $a + b = 7$ सेमी (1)

पाइथागोरस के प्रमेय का उपयोग करने पर हमें मिलेगा,

आकृति 16.2

$$a^2+b^2 = 25 \quad (2)$$

(1) का वर्ग करने तथा (2) का प्रयोग करने पर हम पाते हैं

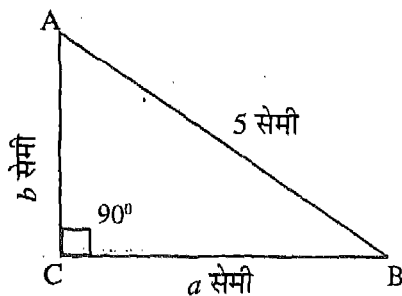
$$25+2ab = 49$$

या $\quad ab = 12 \quad (3)$

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= (\frac{1}{2}ab) = 6$ सेमी^{2}

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

$= 49 - 48 = 1$ (1) तथा (3) से

$$a - b = \pm 1$$

(i) यदि $a+b=7$ तथा $a-b=1$ हमें $a=4, b=3$ मिलता है

(ii) यदि $a+b=7$ और $a-b=-1$ हमें $a=3, b=4$ मिलेगा।

अर्थात् त्रिभुज के अन्य दोनों भुजाओं की लम्बाई 3 सेमी एवं 4 सेमी है।

अब हीरो के सूत्र का प्रयोग कर परिणाम की पुष्टि करते हैं।

अर्ध-परिमाप (s) $= \frac{3+4+5}{2} = 6$ सेमी

अतः $$\Delta = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$$
$$= \sqrt{6\times3\times2\times1} = 6$$

अर्थात् ΔABC का क्षेत्रफल $=6$ सेमी², जैसा कि ऊपर निकाला जा चुका है।

उदाहरण 4 : किसी त्रिभुज की भुजायें 8 सेमी, 15 सेमी तथा 17 सेमी लम्बी हैं। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए। 17 सेमी लम्बी भुजा पर डाले गए शीर्ष लंब की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $s = \frac{8+15+17}{2} = 20$ सेमी

$$\Delta = \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)} \text{ सेमी}^2$$
$$= \sqrt{20\times12\times15\times3} \text{ सेमी}^2$$
$$= \sqrt{100\times36} \text{ सेमी}^2$$
$$= 30 \text{ सेमी}^2$$

अर्थात्, त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 सेमी² है।

माना शीर्ष से 17 सेमी लम्बी भुजा पर डाले गए शीर्षलम्ब की लम्बाई p है। तब

$$\Delta = \frac{1}{2}(17\times p) \left(\because \Delta = \frac{1}{2} \text{ आधार } \times \text{ ऊंचाई}\right)$$

इसलिए, $$\Delta = \frac{1}{2}(17\times p) = 60$$

अथवा $p = \frac{120}{17}$ = या $7\frac{1}{17}$ सेमी

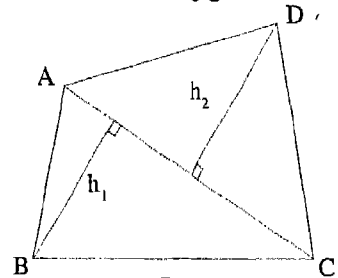
अर्थात् वांछित ऊंचाई $7\frac{1}{17}$ सेमी है।

प्रश्नावली 16.1

1. हीरो के सूत्र का प्रयोग कर निम्न का क्षेत्रफल निकालिए
   - (i) त्रिभुज जिसकी भुजाओं के माप 20 सेमी, 30 सेमी तथा 40 सेमी हैं।
   - (ii) त्रिभुज, जिसकी भुजाओं के माप 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी हैं।
   - (iii) लम्ब त्रिभुज, जिसमें समकोण बनाने वाली भुजाओं के माप 20 सेमी तथा 15 सेमी हैं।
   - (iv) समबाहु त्रिभुज जिसकी परिमाप 60 सेमी हैं।
2. एक समकोण त्रिभुज की परिमाप 144 सेमी है और उसके कर्ण की माप 65 सेमी है। उसकी अन्य दोनों भुजाएं ज्ञात कीजिए और उसका क्षेत्रफल निकालिए। परिणाम की पुष्टि हीरो के सूत्र द्वारा कीजिए।
3. किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा की माप 126 मी तथा उसके कर्ण और दूसरी भुजा की लम्बाईयों का अन्तर 42 मी है। उसकी दोनों अज्ञात भुजाओं के माप को निकालिए तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। परिणाम की पुष्टि हीरो के सूत्र द्वारा कीजिए।
4. किसी समबाहु त्रिभुज की एक भुजा की माप 8 सेमी है। हीरो के सूत्र द्वारा उसका क्षेत्रफल निकालिए। उसकी ऊंचाई क्या है?
5. किसी समद्विबाहु त्रिभुज का आधार 10 सेमी तथा बराबर भुजाओं में से एक भुजा 13 सेमी है। उसका क्षेत्रफल हीरो के सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए।
6. किसी त्रिभुज के भुजाओं का अनुपात 13 : 14 : 15 है और उसका परिमाप 84 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए।
7. किसी त्रिभुज के भुजाओं का अनुपात 25 : 17 : 12 है तथा उसका परिमाप 540 मी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए।

16.4 चतुर्भुज का क्षेत्रफल

किसी चतुर्भुज ABCD को उसके विकर्ण, माना AC, के द्वारा दो भागों ΔABC तथा ΔACD में विभाजित कर सकते हैं (आकृति 16.3)। इस तरह बने ΔABC तथा ΔACD के क्षेत्रफलों की गणना कर सकते हैं। इन क्षेत्रफल का योग, चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल होता है। इस प्रकार, यदि शीर्ष B और D से कर्ण AC पर डाली गई लांबिक दूरियाँ h_1 और h_2 ज्ञात हों, तब

आकृति 16.3

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,AC \times h_1$

त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,AC \times h_2$

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\,AC \times h_1 + \frac{1}{2}\,AC \times h_2$$

$$= \frac{1}{2}AC\ (h_1 + h_2)$$

उदाहरण 5 : चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल निकालिए जिसमें

(i) विकर्ण $AC = 15$ सेमी, तथा B एवं D से AC पर डाले गए लम्ब की लम्बाइयाँ 3 सेमी और 5 सेमी हैं।

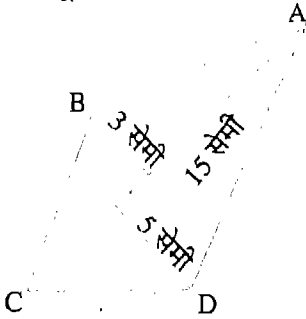
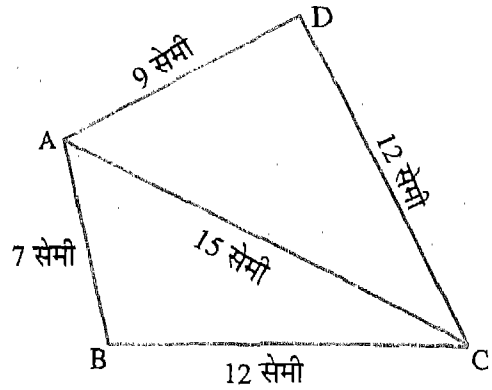
(ii) $AB = 7$ सेमी $BC = 12$ सेमी, $CD = 12$ सेमी, $DA = 9$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 15$ सेमी।

हल : (i) चतर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल (आकृति 16.4 (i))

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times 3 + \frac{1}{2} \times 15 \times 5$$

$$= \frac{15}{2}(3+5) \text{ सेमी}^2$$

$$= 60 \text{ सेमी}^2$$

(iii) हम ΔABC और ΔACD (आकृति 16.4 (ii)) के क्षेत्रफलों की गणना हीरो के सूत्र द्वारा करते हैं।

(i)

(ii)

आकृति 16.4

त्रिभुज ABC में $AB = 7$ सेमी, $BC = 12$ सेमी तथा $CA = 15$ सेमी

ΔABC का अर्ध-परिमाप $= \dfrac{7+12+15}{2} = 17$ सेमी

इसलिए, ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{17(17-7)(17-12)(17-15)}$

$= 10\sqrt{17}$

ΔACD में, $AC = 15$ सेमी, $CD = 12$ सेमी और $DA = 9$ सेमी।

इसलिए, उसका अर्ध-परिमाप $= \dfrac{15+12+9}{2} = 18$ सेमी

त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल $= \sqrt{18(18-15)(18-12)(18-9)}$

$= \sqrt{18 \times 3 \times 6 \times 9}$

$= 54$ सेमी^{2}

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $=$ ΔABC का क्षेत्रफल ΔACD का क्षेत्रफल

$= (10\sqrt{17} + 54)$ सेमी^{2}

$= 10 \times 4.12 + 54 = 95.2$ सेमी^{2}

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 95.2$ सेमी^{2}

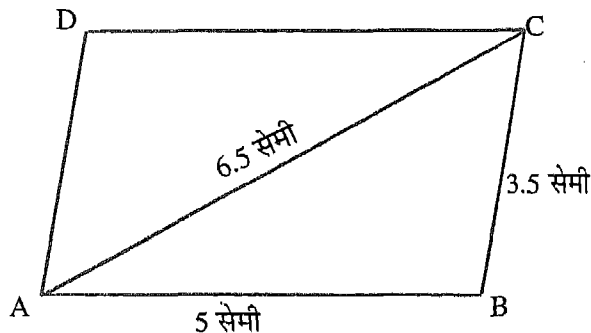
उदाहरण 6 : किसी समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं की माप 5 सेमी और 3.5 सेमी है। उसके एक विकर्ण की माप 6.5 सेमी है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना ABCD दिया हुआ समांतर चतुर्भुज है, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 3.5 सेमी तथा विकर्ण AC = 6.5 सेमी है (आकृति 16.5)।

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का विकर्ण AC उसको दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 2 \times$ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

अब हम ΔABC के क्षेत्रफल का परिकलन करेंगे। त्रिभुज ABC में AB = 5 सेमी, BC = 3.5 सेमी और AC = 6.5 सेमी। अत: उसका अर्ध परिमाप

$$s = \frac{5+3.5+6.5}{2} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ सेमी}$$

आकृति 16.5

$\therefore$ Δ ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{7.5(7.5-5)(7.5-3.5)(7.5-6.5)} \text{ सेमी}^2$$

$$= \sqrt{7.5 \times 2.5 \times 4 \times 1} \text{ सेमी}^2$$

$$= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 2 \times 5\sqrt{3}$ सेमी^{2}

$$= 10\sqrt{3} \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण 7 : एक समचतुर्भुज की परिमाप 20 सेमी है। उसके एक विकर्ण की माप 8 सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल और उसके दूसरे विकर्ण की माप निकालिए।

हल : माना ABCD दिया हुआ समचतुर्भुज है जिसका एक विकर्ण AC = 8 सेमी है (आकृति 16.6)

चूँकि समचतुर्भुज की सभी भुजाएं बराबर होती हैं इसलिए

$$AB = BC = CD = DA = \frac{\text{परिमाप}}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ सेमी}$$

ΔABC में, $AB = BC = 5$ सेमी, तथा $AC = 8$ सेमी, इसलिए उसका

$$\text{अर्ध परिमाप} = \frac{5+5+8}{2} \text{ सेमी} = 9 \text{ सेमी}$$

आकृति 16.6

$\therefore$ हीरो सूत्र द्वारा ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{9 \times 4 \times 4 \times 1}$$

$$= 12 \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ क्षेत्रफल ABCD $= 2 \times \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$$= (2 \times 12) \text{ सेमी}^2$$

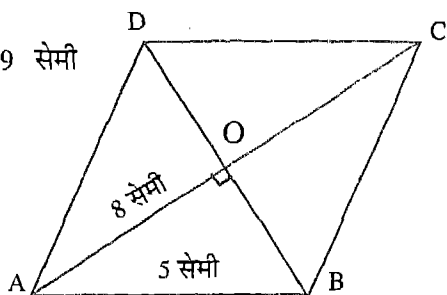
$$= 24 \text{ सेमी}^2 \qquad (1)$$

हम समचतुर्भुज के क्षेत्रफल की गणना कर सकते हैं यदि उसके दोनों विकर्णों की लम्बाई मालूम हो।

$\because$ समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ विकर्णों की लम्बाइयों का गुणनफल

$$= \frac{1}{2} (AC \times BD)$$

$$= 24 \text{ सेमी}^2 \quad ((1) \text{ से})$$

या $\quad \frac{1}{2}(8 \times BD) = 24 \qquad (\because AC = 8 \text{ सेमी})$

या $BD = 6$ सेमी

इस प्रकार, दूसरा विकर्ण $BD = 6$ सेमी।

वैकल्पिक विधि : हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। इसलिए यदि विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिन्दु 0 हो तो AOB समकोण त्रिभुज होगा जिसमें $AO = 4$ सेमी तथा $AB = 5$ सेमी है।

$\therefore \quad BO = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ सेमी

$\therefore$ समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 4 \times$ (समकोण त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल)

$= 4 \times (\frac{1}{2} \times 4 \times 3)$ सेमी^{2}

$= 24$ सेमी^{2}

विकर्ण $BD = 2 \times BO = 6$ सेमी

प्रश्नावली 16.2

1. चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल की गणना कीजिए जब विकर्ण AC की लम्बाई $= 10$ सेमी तथा B और D से AC पर डाले गए लम्बों की लम्बाई क्रमश: 5 सेमी एवं 6 सेमी हो।

2. चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए जबकि उसके एक विकर्ण की माप 50 सेमी तथा चतुर्भुज के सम्मुख शीर्षों से दिए हुए विकर्ण पर डाले गए लम्ब की लम्बाइयाँ 10 सेमी और 20 सेमी हों।

3. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें $AB = 3$ सेमी, $BC = 4$ सेमी, $CD = 6$ सेमी, $DA = 5$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 5$ सेमी है।

4. किसी समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमश: 51 सेमी तथा 37 सेमी हैं। उसके विकर्णों में से एक 20 सेमी लम्बी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए।

5. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए जिसके एक विकर्ण की लम्बाई 6.8 सेमी है तथा इस विकर्ण की सम्मुख शीर्ष से लाम्बिक दूरी 7.5 सेमी है।

6. किसी समचतुर्भुज का परिमाप 146 सेमी है। उसके एक विकर्ण की लम्बाई 55 सेमी है। दूसरे विकर्ण की लम्बाई तथा समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी भुजाओं की लम्बाई मीटर में क्रमश: 9, 40, 28 तथा 15 है और प्रथम दो भुजाओं के बीच समकोण है।

16.5 वृत्त, वृत्त का त्रिज्यखंड (Sector) तथा वृत्त खंड (Segment)

(i) *वृत्त :* बहुत सी वस्तुयें जिनका हमारे दैनिक जीवन से सम्बन्ध है वृत्ताकार बनावट की होती हैं। अत: हमारे जीवन मे वृत्ताकार आकृतियों से संबंधित वस्तुओं की लम्बाई तथा क्षेत्रफल निकालने में उत्पन्न व्यवहारिक कठिनाइयों का निवारण महत्वपूर्ण है। प्रारम्भिक कक्षाओं में आप कागज पर परकार की सहायता से वृत्त खींचना सीख चुके हैं। आपको स्मरण दिला दें कि वृत्त समतल ज्यामितीय आकृति है जिसका प्रत्येक बिन्दु, उसी समतल के एक निश्चित बिन्दु से अचर दूरी पर रहता है। निश्चित बिन्दु को वृत्त का *केन्द्र* और अचर दूरी को उसकी *त्रिज्या* कहते हैं। त्रिज्या का दो गुना *व्यास* होता है। वृत्त का एक चक्कर लगाने में चलित दूरी, उसकी *परिमाप* अथवा परिधि कहलाती है। हम भलीभांति जानते हैं कि किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है। इस अचर राशि को ग्रीक (यूनानी) अक्षर π से दर्शाते हैं।

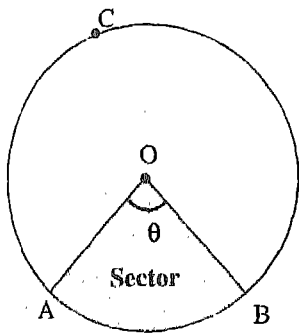
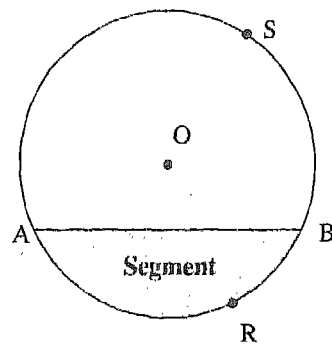
इस प्रकार $\dfrac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

अथवा परिधि $= \pi \times$ व्यास

$= \pi \times 2r$

$= 2\pi r$ (जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है)

महान भारतीय गणितज्ञ, आर्यभट्ट, (जन्म 476 A.D.) ने वर्ष 499 A.D. में π का सन्निकट मान दिया था। उन्होंने $\pi = \dfrac{62832}{20000}$ लगभग, खोजा। इस भिन्न को दशमलव में बदलने पर हम $\pi = 3.1416$ (लगभग) पाते हैं। महान मेधावी भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन (1887-1920) की एक सर्वसमिका, का उपयोग कर गणितज्ञ π का मान दशमलव के लाखों अंक तक शुद्ध मान निकालने में सफल रहे है। π एक अपरिमेय संख्या है अत: उसका दशमलव में निरूपण अनावर्त (non-repeating) और अनवसानी (non-terminating) है। व्यवहारिक कार्यो में *π का सन्निकट मान* $\dfrac{22}{7}$ *या* 3.14 *लेते हैं।*

(ii) *त्रिज्यखंड तथा वृत्त खंड :* वृत्त का कोई भी भाग वृत्त का चाप कहलाता है। वृत्त पर दो बिन्दु A और B उसको दो चापों में बांटते हैं। सामान्यत: एक चाप दूसरे से बड़ा होता है। छोटा चाप लघु चाप और बड़ा चाप दीर्घ चाप कहलाता हैं। दोनों का नाम चाप $\widehat{AB}$ है। दोनो चापों में अन्तर करने के लिए बड़े चाप पर एक बिन्दु C ले लेते हैं और लघु चाप को $\widehat{AB}$ द्वारा तथा दीर्घ चाप को $\widehat{ACB}$ द्वारा लिखते हैं (आकृति 16.7 (i))। यदि इस तरह से बने दोनों चाप बराबर हों तो प्रत्येक को *अर्धवृत्त* कहते हैं।

आकृति 16.7

यदि हम A और B को रेखाखण्ड से जोड़ दें तो इस रेखाखण्ड AB को *जीवा* AB कहते हैं। मान लीजिए वृत्त जिसका केन्द्र O है, की AB एक चाप है। तब त्रिज्याओं $\overline{AO}$, BO तथा चाप AB से घिरा क्षेत्र वृत्त का *त्रिज्यखंड* कहलाता है (आकृति 16.7(i) का छायांकित भाग देखिए)। त्रिज्यखंड OAB को लघु त्रिज्यखंड कहेंगे यदि AB लघुचाप है। लघु त्रिज्यखंड AOB का लघुचाप AB केन्द्र पर कोई कोण θ डिग्री में बनाता है $(\theta < 180^0)$ आकृति 16.7 (ii) में चाप AB वृत्त को दो क्षेत्रों ARB तथा BSA में विभाजित करता है जिसे *वृत्तीय क्षेत्र का खंड* संक्षेप में *वृत्त का खंड* कहते हैं। खंड ARB लघु तथा खंड BSA दीर्घ है [आकृति 16.7 (ii)]। जब AB वृत्त का व्यास होता है उससे निर्धारित त्रिज्य खंड, वृत्त का खंड हो जाता है।

16.6 वृत्त के त्रिज्यखंड तथा खंड का क्षेत्रफल

यहाँ हम अपने को वृत्त के त्रिज्यखंड तथा खंड के क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या तक केन्द्रित रखेंगे। बिना सिद्ध किए लिखना वांछित है कि वृत्त का क्षेत्रफल जिसकी त्रिज्या r है, πr^2 होती है।

(i) *वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल :* त्रिज्या r का त्रिज्यखंड AOB लीजिए (आकृति 16.7 (i) माना $\angle AOB = \theta\ (\theta < 180^0)$। जब θ बढ़ता है, चाप की लम्बाई उसी अनुपात में वृद्धि करती है।

जब कोई चाप केन्द्र पर 180^0 का कोण अंतरित करता है;

उसकी लम्बाई = अर्धवृत्त की लम्बाई

$$= \pi r$$

$\therefore$ चाप की लम्बाई जो केन्द्र पर θ^0 का कोण अंतरित करता है

$$= \frac{\pi r \theta}{180}$$

इसी प्रकार जब कोई चाप केन्द्र पर 180^0 अंतरित करता हैं, उसके संगत त्रिज्यखंड अर्धवृत्त हैं जिसका क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2}{2}$$

इसलिए यदि चाप केन्द्र पर θ का कोण अंतरित करता है, उसके संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{2 \times 180}$$

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

इस प्रकार त्रिज्या r के वृत में, कोण θ (डिग्री में) के त्रिज्यखंड के चाप की लम्बाई L और क्षेत्रफल A के लिए

$$L = \frac{\pi r \theta}{180}, \quad A = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

हम ध्यान दें कि $A = \dfrac{Lr}{2}$

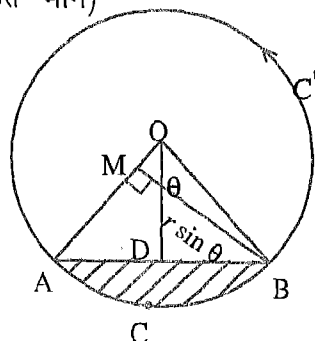
(ii) *वृत्त खंड का क्षेत्रफल :* माना कि कोई चाप AB, त्रिज्या r के वृत्तीय क्षेत्र को दो खंडों ACB और BC'A में विभाजित करता है। माना कि हम लघु खंड ACB का क्षेत्रफल निकालना चाहते हैं (आकृति 16.8 छायांकित भाग)

AO और BO को मिलाइए।

माना कोण $AOB = \theta\ (\theta<180°)$

ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} OA \times BM$

जहाँ BM, B से OA पर लम्ब है।

$= \frac{1}{2} OA \times OB \sin\theta$

आकृति 16.8

वृत्त खंड ACB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल $- \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2}(OA \times OB \sin\theta)$$

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2}(r^2 \sin\theta)\ (\because OA = OB = r)$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi\theta}{180} - \sin\theta\right]$$

वैकल्पिक विधि : वृत खंड ACB का क्षेत्रफल निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है:

केन्द्र O से जीवा AB पर लम्ब OD खींचिए (आकृति 16.8)। तब OD कोण θ को समद्विभाजित करती है, क्योंकि ΔOAB समद्विबाहु है जिसमें $OA = OB = r$

$\therefore\ \Delta OAB$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AB \times OD = AD \times OD = r\sin\frac{\theta}{2} \times r\cos\frac{\theta}{2}$

$$= r^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$\therefore$ वृत खंड ABC का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल $- \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2\theta}{360} - r^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= r^2\left(\frac{\pi\theta}{360} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

नोट : यदि आप ऊपर दो विधियों से प्राप्त ΔOAB के क्षेत्रफल को बराबर करें, तो आप पाते हैं कि।

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

माना आप वृत्त के दीर्घखंड का क्षेत्रफल निकालना चाहते हैं, तब इस परिणाम का उपयोग कीजिए कि

दीर्घवृतखंड का क्षेत्रफल + लघुवृतखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल

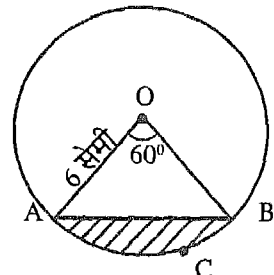
इसलिए, त्रिज्या r के वृत्त के दीर्घखंड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi\theta}{180} - \sin\theta\right]$$

उदाहरण 8 : 6 सेमी त्रिज्या के वृत की जीवा AB, केन्द्र O पर 60^0 का कोण अंतरित करती है। वृत्त के त्रिज्यखंड OACB तथा खंड ACB का क्षेत्रफल निकालिए (आकृति 16.9)। ($\pi = 3.14$ तथा $\sqrt{3} = 1.73$ का उपयोग कीजिए)

हल : (i) हमें इस सूत्र का प्रयोग करना है कि r त्रिज्या वाले वृत्त खंड का क्षेत्रफल, जो केन्द्र पर θ कोण अंतरित करता है, $\frac{\pi r^2\theta}{360}$ होता है।

यहाँ $r = 6$ सेमी, $\theta = 60^0$

आकृति 16.9

अत: अभीष्ट वृत खंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi \times 6^2 \times 60}{360}$ सेमी^{2}

$= 6\pi$ सेमी^{2} $= 6 \times 3.14$ सेमी^{2}

$= 18.84$ सेमी^{2} (1)

(ii) Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 60^0$

$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2})$

$= \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{1.73}{2}$

= 15.57 सेमी^{2} (2)

वृत-खंड ACB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल - त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

= (18.84 – 15.57) सेमी^{2} ((1) और (2) से)

= 3.27 सेमी^{2}

वैकल्पिक विधि : यदि हम वृत खंड के क्षेत्रफल के लिए वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करें, तब वृत खंड ACB का क्षेत्रफल

$= 6^2 \left(\frac{\pi \times 60}{360} - \sin 30^0 \cos 30^0\right)$

$= 6^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi - 9\sqrt{3}$

= 18.84 – 15.57 = 3.27 सेमी^{2}

उदाहरण 9 : घड़ी के मिनट सुई की लम्बाई 14 सेमी है। मिनट सुई द्वारा एक मिनट में बनाए गए क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : मिनट सुई 14 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाता है। एक घंटे अर्थात् 60 मिनट में वह 360° का कोण निर्मित करता है। अतः मिनट सुई एक मिनट में $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

का कोण बनाता है। इस प्रकार मिनट सुई, एक मिनट में, 6° कोण का और 14 सेमी त्रिज्या का त्रिज्यखंड निर्मित करती है।

मिनट सुई द्वारा निर्मित वाँछित क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360} \text{ सेमी}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 6}{360} \text{ सेमी}^2$$

$$= \frac{154}{15} \text{ सेमी}^2 = 10.27 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण 10 : वृत्त जिसकी त्रिज्या 10 सेमी है, उसकी जीवा AB केन्द्र पर समकोण अंतरित करती है। त्रिज्यखंड तथा दीर्घ वृत्त-खंड का क्षेत्रफल निकालिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल : त्रिज्यखंड OACB के क्षेत्रफल (आकृति 16.10) $= \frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= [3.14 \times 10^2 \times \frac{90}{360}] \text{ सेमी}^2$$

$(\because \theta = 90^0, r = 10\text{सेमी})$

$$= \frac{1}{4}(3.14 \times 10^2) \text{ सेमी}^2$$

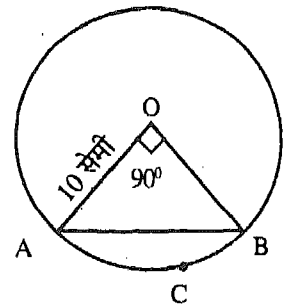
$$= 3.14 \times 25 \text{ सेमी}^2$$

$$= 78.50 \text{ सेमी}^2$$

ध्यान दीजिए कि प्राप्त क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल का चौथाई है।

समकोण ΔAOB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊंचाई

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \text{ सेमी}^2$$

$$= 50 \text{ सेमी}^2$$

आकृति 16.10

लघु वृत्त-खंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल – त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$= (78.50 - 50)$ सेमी^{2}

$= 28.5$ सेमी^{2} (1)

दीर्घ वृत्त-खंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल-लघु वृत्त-खंड का क्षेत्रफल

$= (\pi \times 10 \times 10 - 28.5)$ सेमी^{2} ((1) से)

$= (3.14 \times 100 - 28.5)$ सेमी^{2}

$= (314 - 28.5)$ सेमी^{2}

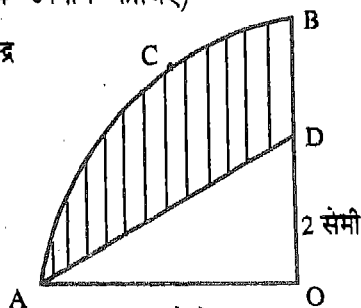
$= 285.5$ सेमी^{2}

प्रश्नावली 16.3

1. वृत्त-खंड का क्षेत्रफल निकालिए यदि संगत त्रिज्यखंड का कोण 120° तथा वृत्त की त्रिज्या 21 सेमी है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
2. वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
3. वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए यदि 40^0 के चाप की लम्बाई 4π सेमी है। अतः, इस चाप से बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल निकालिए।
4. वर्ग ABCD, 10 इकाई त्रिज्या के वृत्त के अंतर्गत बना है। वृत्त के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वर्ग के अन्दर नहीं है। ($\pi = 3.14$ उपयोग कीजिए)
5. संलग्न आकृति में, वृत्त 3.5 सेमी त्रिज्या तथा O केन्द्र के वृत्त का चतुर्थांश OAB प्रदर्शित करता है।

   (i) चतुर्थांश OACB के क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

   (ii) दिया है OD = 2 सेमी, छायांकित भाग के क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

   ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

आकृति 16.11

6. घड़ी की मिनट सुई 10 सेमी लम्बी है। मिनट सुई द्वारा 9:00 पूर्वाह्न से 9:35 पूर्वाह्न के मध्य घड़ी के तल पर बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. दो संकेन्द्री वृत्त जिनकी त्रिज्याएं 20 सेमी और 15 सेमी हैं, के द्वारा परिबद्ध वलयाकार भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 17300 सेमी^{2} है। त्रिभुज के प्रत्येक कोणीय बिंदु को केन्द्र मानकर और त्रिभुज की भुजा की आधी लंबाई को त्रिज्या मानकर वृत्त खीचा गया है। त्रिभुज का वह क्षेत्रफल निकालिए जो वृत्तों के अन्तर्गत नहीं है। ($\pi = 3.14$ तथा $\sqrt{3} = 1.73$ लीजिए)

9. (i) उस वृत्त की परिधि निकालिए जिसका क्षेत्रफल 6.16 सेमी^{2} है।

   (ii) उस वृत्त का क्षेत्रफल क्या है, जिसकी परिधि 11 सेमी भुजा के वर्ग के परिमाप के बराबर है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

10. त्रिज्या 21 सेमी के वृत्त की एक चाप केन्द्र पर 60^0 का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए :

    (i) चाप की लम्बाई

    (ii) इस चाप द्वारा बना हुआ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

    (iii) इस चाप द्वारा बना हुआ वृत्त-खंड का क्षेत्रफल।

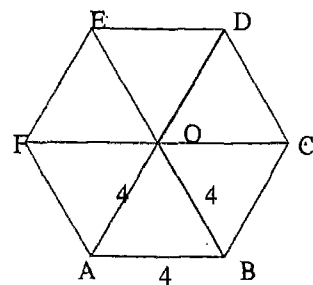
16.7 विविध उदाहरण

उदाहरण 11 : समषटभुज का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी एक भुजा 4 इकाई है।

हल : माना ABCDEF दिया हुआ समषटभुज है (आकृति 16.12)। उसका केन्द्र O लीजिए, जो कि विकर्णों AD, BE और CF का प्रतिच्छेद बिन्दु है। तब समषटभुज 4 इकाई भुजा वाले 6 समबाहु त्रिभुजों में विभाजित होता है।

आकृति 16.12

$\because$ भुजा a इकाई वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$ वर्ग इकाई

$= 4\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

अतः, समभुज ABCDEF का क्षेत्रफल $= 6 \times \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$= 6 \times 4\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 12 : समलंब के दो समांतर भुजाओं की लम्बाइयाँ 18 सेमी तथा 10 सेमी है। उसका क्षेत्रफल निकालिए यदि उसकी दो अन्य भुजाएं में प्रत्येक 5 सेमी लम्बी हो।

हल : दिया हुआ समलंब ABCD लीजिए (आकृति 16.13), तब $AB = 18$ सेमी, $CD = 10$ सेमी और $AD = BC = 5$ सेमी है। DA के समांतर CE खींचिए जो कि AB को E पर प्रतिच्छेद करे। तब AECD समांतर चतुर्भुज है, जिसकी भुजाएं 10 सेमी तथा 5 सेमी हैं, और ΔCEB एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा $EC = BC = 5$ सेमी और $EB = 8$ सेमी है।

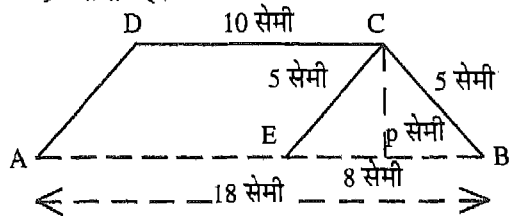
ΔEBC का अर्ध परिमाप $= \frac{(5+5+8)}{2} = 9$ सेमी है।

हीरो के सूत्र का प्रयोग करने पर,

ΔEBC का क्षेत्रफल

$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$

$= 12$ सेमी^{2} (1)

D 10 सेमी C
5 सेमी 5 सेमी
E p सेमी
A B
8 सेमी
18 सेमी

आकृति 16.13

त्रिभुज EBC के आधार EB पर शीर्ष C से डाले गए लम्ब की लम्बाई p लीजिए।

तब ΔEBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(p \times 8)$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(p \times 8) = 12 \quad ((1)$ से$)$

या $\quad p = 3$ सेमी

अब समलंब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ समांतर भुजाओं का योग × ऊंचाई

$$= \frac{1}{2}(18+10)\times 3 \text{ सेमी}^2$$

$$= 42 \text{ सेमी}^2$$

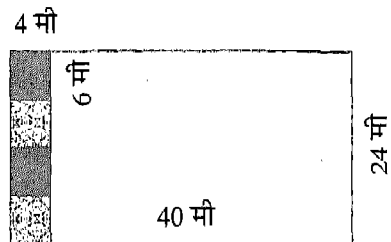
उदाहरण 13 : आयताकार हाल जिसकी लम्बाई 40 मी है, उसके फर्श का क्षेत्रफल 960 मी^{2} है। 6 मी × 4 मी माप की कालीनें उपलब्ध हैं। हाल के फर्श पर बिछाने के लिए कितने कालीनों की आवश्यकता होगी?

हल : प्रत्येक कालीन की लम्बाई 6 मी और चौड़ाई 4 मी अर्थात् क्षेत्रफल = 24 मी^{2} है।

हाल के फर्श का क्षेत्रफल = 960 मी^{2}

उसकी लम्बाई = 40 मी

उसकी चौड़ाई = क्षेत्रफल/लम्बाई

$$= \frac{960}{40} = 24 \text{ मी}$$

इस प्रकार फर्श की लम्बाई 40 मी

और चौड़ाई 24 मी है।

4 मी
6 मी
24 मी
40 मी

आकृति 16.14

चूँकि 6, 24 को विभाजित करता है, परंतु 40 को नहीं, हम कालीन के लम्बाई का घेर हाल के चौड़ाई के तरफ बिछायेंगे (आकृति 16.14)। इस प्रकार हमें एक स्तंभ (कालम) में $24 \div 6 = 4$ कालीनों की आवश्यकता है जो कि फर्श का 24×4 मी^{2} आच्छादित करता है। फर्श के 40 मी लम्बाई को 4 मी चौड़े कालीन से ढकने के लिए हमें $40 \div 4 = 10$ स्तम्भ की जरूरत है। इस प्रकार हमें 24 मी लम्बाई और 4 मी चौड़ाई के 10 आयताकार स्तंभों की आवश्यकता है। चूँकि एक स्तंभ में 4 कालीनें हैं और स्तंभों की संख्या 10 है। अत: कालीनों की संख्या 40 है।

उदाहरण 14 : दो संकेन्द्री वृत्ताकार दौड़पथ क्रमशः 100 मीटर तथा 102 मीटर त्रिज्याओं के हैं। A भीतरी दौड़पथ पर दौड़ता है और दौड़पथ का एक चक्कर 1 मिनट 30 सेकंड में लगाता है, जबकि B बाहरी दौड़पथ पर 1 मिनट 32 सेंकड में दौड़ता है। कौन तेज दौड़ता है?

हल : भीतरी दौड़पथ की परिधि $= 2\pi \times 100$ मी

$= 200\pi$ मी

बाहरी दौड़पथ की परिधि $= 2\pi \times 102$ मी

$= 204\pi$ मी

A भीतरी वृत्त के परिधि की दूरी तय करता है 1 मिनट 30 सेकंड अर्थात् $\frac{3}{2}$ मिनट में

अतः A द्वारा $\frac{3}{2}$ मिनटों में चलित दूरी $= 200\pi$ मी

इसलिए, A द्वारा 1 मिनट में चलित दूरी $= \frac{200\pi \times 2}{3}$ मी

$= 133\frac{1}{3}\pi$ मी

$\therefore$ A की चाल $= 133.33\pi$ मी/मिनट

अब 1 मिनट 32 सेकंड $= (1+\frac{32}{60})$ मिनट $= \frac{23}{15}$ मिनट

अतः B द्वारा $\frac{23}{15}$ मिनट में चलित दूरी $= 204\pi$ मी

इसलिए, B द्वारा 1 मिनट में चलित दूरी $= \frac{204\pi \times 15}{23}$

$= 133.04\pi$ मी

$\therefore$ B की चाल $= 133.04\pi$ मी/मिनट

चूँकि A की चाल B से अधिक है, इसलिए A तेज दौड़ता है।

उदाहरण 15 : आकृति 16.15 में, ABC एक समबाहु त्रिभुज 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त के अन्तर्गत निर्मित है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल निकालिए।

हल : आकृति 16.15 से स्पष्ट है कि छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= दिए हुए वृत्त का क्षेत्रफल – ΔABC का क्षेत्रफल

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times 4^2$ सेमी^{2}

= 16π सेमी^{2} (1)

माना ΔABC की ऊँचाई h है।

चूँकि वृत्त का केन्द्र, समबाहु त्रिभुज के केन्द्रक के संपाती है, इसलिए परिवृत्त की त्रिज्या $= \frac{2}{3}h$

अत: हमें मिलता है $4 = \frac{2}{3}h$ या $h = 6$ सेमी (2)

समबाहु त्रिभुज की भुजा a लीजिए, तब समकोण त्रिभुज ADB से

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{या} \quad \frac{3a^2}{4} = h^2$$

या $$a^2 = \frac{4h^2}{3}$$

या $$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$$ ((12) से)

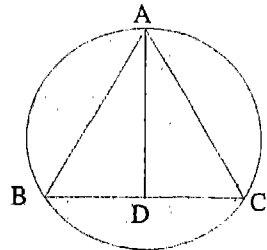
आकृति 16.15

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2$$

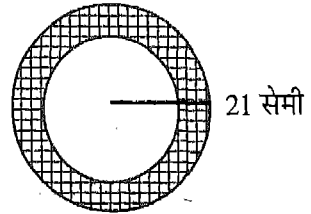
= $12\sqrt{3}$ सेमी^{2} (3)

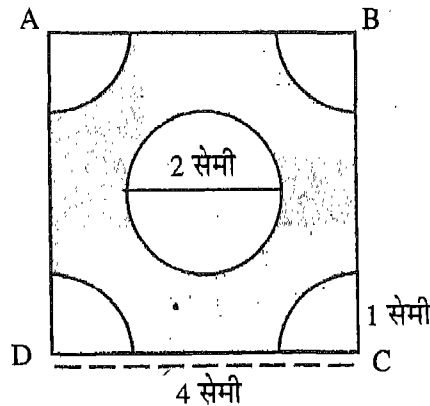
$\therefore$ छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल-त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

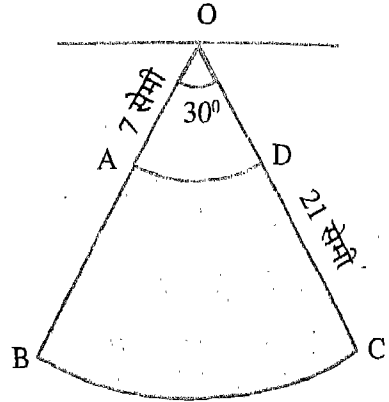
= $(16\pi - 12\sqrt{3})$ सेमी^{2} ((1) और (3) से)

विविध प्रश्नावली

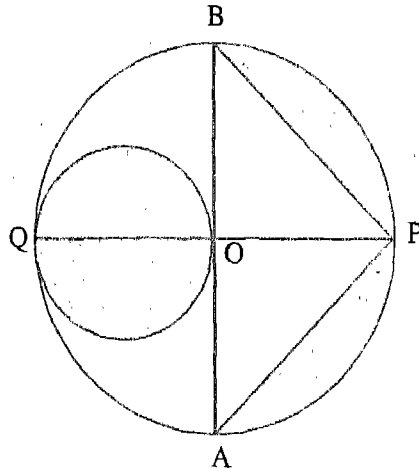
1. एक तार जब वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है तब 121 वर्ग सेमी का क्षेत्र परिबद्ध करता है। यदि तार को वृत्त के आकार में मोड़ा जाए तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ मानिए)

2. कागज से, जो आयत ABCD के आकार का है जिसमें AB = 18 सेमी और BC = 14 सेमी है एक अर्ध-वृत्तीय भाग जिसका BC व्यास है काटा जाता है। कागज के बचे हुए भाग का क्षेत्रफल निकालिए।

3. संलग्न आकृति में, दो संकेन्द्री वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्र 770 सेमी² है (आकृति 16.16)। बाहरी वृत्त की त्रिज्या 21 सेमी दी गई है, भीतरी वृत्त की त्रिज्या की गणना कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

आकृति **16.16**

4. ABCD, 4 सेमी भुजा का वर्ग है। वर्ग के प्रत्येक कोने पर, 1 सेमी त्रिज्या का चौथाई वृत्त तथा केन्द्र पर 1 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचे जाते हैं, जैसा की आकृति 16.17 में दिखाया गया है। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालिए ($\pi = 3.14$ उपयोग कीजिए)

आकृति **16.17**

5. आकृति 16.18 में छायांकित भाग, कार के वाइपर द्वारा साफ किए गए क्षेत्र को प्रदर्शित करता है। वाइपर द्वारा साफ किए गए क्षेत्र की गणना कीजिए, यदि OA = 7 सेमी और OB = 21 सेमी। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

आकृति 16.18

6. आकृति 16.19 में, वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या OA = 7 सेमी है के AB और PQ दो लम्ब व्यास हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल निकालिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

आकृति 16.19

7. शतरंज के बोर्ड में 64 बराबर वर्ग हैं और प्रत्येक वर्ग का क्षेत्रफल 6.25 सेमी^{2} है। बोर्ड के चारों तरफ 2 सेमी चौड़ा किनारा है। शंतरज के बोर्ड के भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

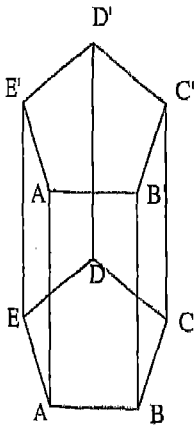
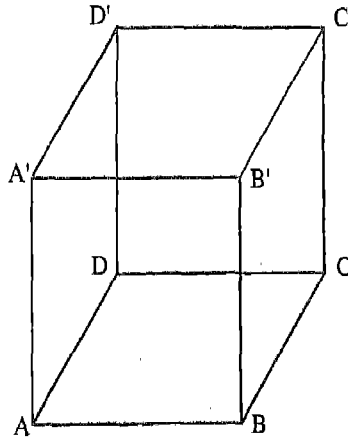
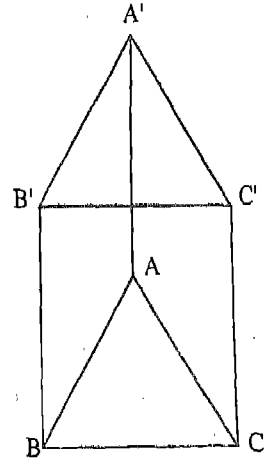
अध्याय 17

ठोस आकृतियों का मेन्सुरेशन

17.1 भूमिका

अध्याय 16 में हम समतल आकृतियों के मेन्सुरेशन का अध्ययन कर चुके है। इस अध्याय में हमारा लक्ष्य ठोस आकृतियों के मेन्सुरेशन का अध्ययन करना है। हम विशेषकर प्रिज्मों, पिरैमिडों तथा उनके आयतनों और पृष्ठीय क्षेत्रफलों के बारे में पढ़ेगें।

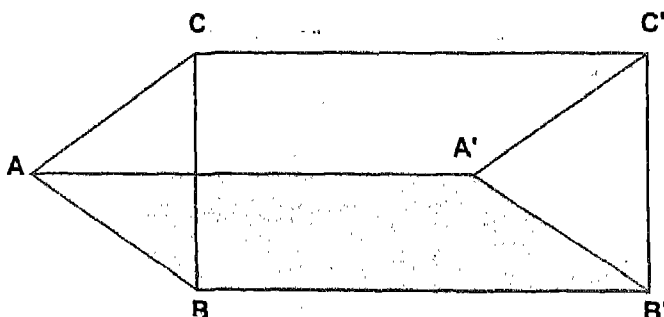
17.2 लम्ब प्रिज्म

दो सम सर्वांगसम समतलीय आकृतियाँ जैसे सम पंचभुज को दो विभिन्न समांतर तलों में लीजिए। संगत शीर्षों AA', BB', CC', DD' तथा EE' को इस प्रकार मिलाइए कि पार्श्व फलकें AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E तथा EE'A'A आयत बनें [आकृति 17.1(i)]। इस प्रकार निर्मित ठोस को *लम्ब प्रिज़्म* कहते है। समांतर फलकें ABCDE तथा (A'B'C'D'E') को प्रिज़्म का *आधार* (सिरे) कहते है।

(i) लम्ब पंचभुजीय प्रिज्म (ii) लम्ब वर्गाकार प्रिजम (iii) लम्ब त्रिभुजीय प्रिज्म

आकृति 17.1

आधार की आकृतियों के नाम पर प्रिज्म का नाम पड़ता है। जैसे यदि आधार त्रिभुज है तो प्रिज्म को लम्ब त्रिभुजीय प्रिज्म कहते है। यदि आधार की आकृति पंचभुज है तब प्रिज्म को लम्ब पंचभुजीय प्रिज़्म कहेगें।

घन और घनाभ प्रिज्म के परिचित उदाहरण हैं जिनके आधार क्रमश: वर्ग तथा आयत हैं।

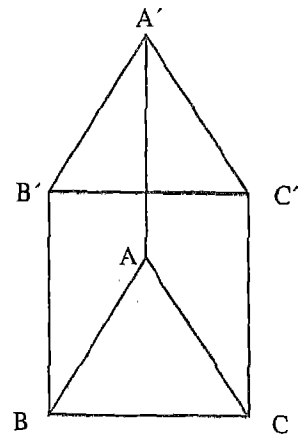
टिप्पणी

1. व्यापक रूप में, *लम्ब प्रिज़्म समतलीय पृष्ठों से निर्मित ठोस है जिसके आधार समांतर सर्वांगसम बहुभुज होते हैं तथा पार्श्वपृष्ठ आयत हैं।*
2. समांतर आधारों के बीच की दूरी को लम्ब प्रिज़्म की *ऊंचाई* कहते हैं।
3. यह आवश्यक नही है कि प्रिज्म आधार के सहारे ही टिकी हो। वह पार्श्वपृष्ठ के सहारे भी रखी जा सकती है, जैसा कि आकृति 17.2 में दिखाया गया है। इस स्थिति में आधारों को *सिरे* कहना तथा ऊंचाई को प्रिज्म की *लम्बाई* कहना अधिक उपयुक्त होगा।

आकृति 17.2

इस पाठ में हम उन लम्ब प्रिज्मों के पार्श्व पृष्ठों के क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठों के क्षेत्रफल, आयतनों की विवेचना पर ही केन्द्रित, रहेंगे जिनके आधार समबाहु त्रिभुज हैं।

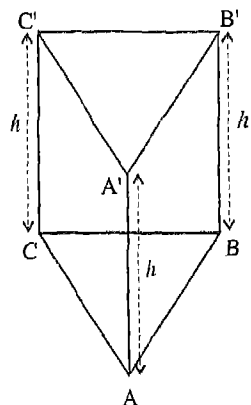
17.3 लम्ब त्रिभुजीय प्रिज़्म

आकृति 17.3 में लम्ब त्रिभुजीय प्रिज़्म दर्शाया गया है। संभव है कि पारदर्शी शीशे से बना ऐसा प्रिज्म आपने अपनी विज्ञान की प्रयोगशाला में देखा हो।

समांतर पृष्ठ ABC तथा A'B'C' को प्रिज़्म के सिरों की फलकें कहते हैं। सिरे ABC को जिसके सहारे प्रिज़्म खड़ा रहता है, प्रिज़्म का *आधार* कहते है। आयताकार पृष्ठों AA'B'B, BB'C'C तथा CC'A'A को प्रिज़्म का पार्श्व (किनारा) पृष्ठ कहते हैं। दो पार्श्व फलकों की उभयनिष्ट रेखाखण्ड को *पार्श्व कोर* कहते हैं। आकृति 17.3 में AA', BB' तथा CC' प्रिज़्म की पार्श्व कोरे है। इस लम्ब त्रिभुजीय प्रिज़्म के छः शीर्ष A, B, C, A', B', C', नौ कोरें AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A', AA', BB' तथा CC' तथा पांच फलकें ABC, A'B'C', ABB'A', CC'A'A' BCC'B' हैं।

लम्ब त्रिभुजीय प्रिज़्य

आकृति 17.3

17.4 लम्ब त्रिभुजीय प्रिज़्म का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

प्रिज़्म के पार्श्व पृष्ठों के क्षेत्रफलों के योग को उसका *पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल* कहते हैं। पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा दोनो सिरों के क्षेत्रफलों के योग को प्रिज्म का सम्पूर्ण *पृष्ठ क्षेत्रफल* कहते हैं। आकृति 17.4 में एक लम्ब त्रिभुजीय प्रिज़्य दिखाया गया है। इसका

(i) पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठों ABB'A', BCC'B' तथा CAA'C' के क्षेत्रफल का योग

$$= (AB \times h + BC \times h + CA \times h)$$

$$= (AB + BC + CA) \times h$$

जहाँ h प्रिज़्म की ऊंचाई है।

आकृति 17.4

पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल = (आधार का क्षेत्रफल) × प्रिज़्म की ऊंचाई (1)

(ii) लम्ब त्रिभुज प्रिज़्म का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल + 2 (आधार का क्षेत्रफल)

दूसरे शब्दो में

सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल + 2 (आधार का क्षेत्रफल)
= (आधार का परिमाप) × ऊंचाई + 2 (आधार का क्षेत्रफल)

विशेषकर, यदि, h ऊंचाई के प्रिज़्म का आधार भुजा a का समबाहु त्रिभुज हो तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल

$3a \times h + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ है। ($\because$ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ होता है)

नोट : लम्ब प्रिज़्मों के लिए सूत्र (1) तथा (2) हमेशा सत्य हैं, उसके आधार की आकृति चाहे जिस प्रकार की हो।

अब हम कुछ उदाहरणों से सूत्रों को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1 : किसी लम्ब प्रिज्म की ऊंचाई 10 सेमी तथा आधार 8 सेमी भुजा का समबाहु त्रिभुज है। उसका पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : लम्ब त्रिभुज का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई

$= (8 + 8 + 8) \times 10$ सेमी^{2}

$= 240$ सेमी^{2}

त्रिभुजीय प्रिज़्म का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल + 2 (आधार का क्षेत्रफल)

$= (240 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2)$ सेमी^{2}

$= (240 + 32\sqrt{3})$ सेमी^{2}

$= (240 + 55.424)$ सेमी^{2}

($\sqrt{3} = 1.732$ लेने पर)

$= 295.424$ सेमी^{2}

उदाहरण 2 : किसी लम्ब प्रिज्म का आधार समबाहु त्रिभुज है जिसका क्षेत्रफल $9\sqrt{3}$ सेमी^{2} है। यदि प्रिज़्म की ऊंचाई 16 सेमी हो, तो उसका पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : a भुजा के समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9\sqrt{3}$ (दिया है)

या $\quad a^2 = 36$

या $\quad a = 6$

अर्थात् समबाहु त्रिभुज की भुजा 6 सेमी है।

प्रिज़्म का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल = (आधार का परिमाप) × ऊंचाई

= (18×16) सेमी²

= 288 सेमी²

प्रिज़्म का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल +2 (आधार का क्षेत्रफल)

= $288 + 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2\right)$ सेमी²

= $(288 + 18\sqrt{3})$ सेमी²

उदाहरण 3 : किसी लम्ब प्रिज़्म का आधार 36 सेमी परिमाप का समबाहु त्रिभुज है। यदि प्रिज़्म का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $(288 + 72\sqrt{3})$ सेमी² हो, तो उसकी ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आधार का क्षेत्रफल = 36 सेमी

अत: आधार की भुजा = 12 सेमी ($\because$ आधार समबाहु त्रिभुज है)

प्रिज़्म का सम्पूर्ण क्षेत्रफल = (आधार का परिमाप) × ऊंचाई
+ 2 × (आधार का क्षेत्रफल)

= $36h + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2$ (जहाँ h ऊंचाई है)

= $36h + 72\sqrt{3}$

दिया हुआ है सम्पूर्ण क्षेत्रफल $= (288 + 72\sqrt{3})$ सेमी^{2}

$\therefore \quad 36h + 72\sqrt{3} = 288 + 72\sqrt{3}$

या $\quad h = 8$

अत: प्रिज़्म की ऊंचाई 8 सेमी है।

17.5 लम्ब त्रिभुजीय प्रिज्म का आयतन

हम पिछले परिच्छेद में आपको बता चुके है कि घनाभ, एक लम्ब प्रिज़्म है। हमें यह भी ज्ञात है कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊंचाई का गुणनफल होता है। इसलिए स्वाभाविक रूप से यह अनुमान होता है कि घनाभ के आयतन का सूत्र सभी लम्ब प्रिज़्मों के लिए भी ठीक होना चाहिए। हम ज्यामितिय विधि से यह सिद्ध कर सकते हैं कि हमारा अनुमान सही है। हम बिना सिद्ध किये यह कथन करते हैं कि लम्ब प्रिज़्म का आयतन उसके आधार का क्षेत्रफल तथा ऊंचाई का गुणनफल है।

लम्ब प्रिज़्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई

विशेष स्थिति में, जब लम्ब प्रिज़्म का आधार a भुजा का समबाहु त्रिभुज हो, तब

$$\text{आयतन} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times h$$

जहाँ h प्रिज़्म की ऊंचाई है।

हम कुछ उदाहरणों के द्वारा इसकी व्याख्या करेंगे।

उदाहरण 4 : लम्ब प्रिज़्म का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊंचाई 10 सेमी तथा आधार 6 सेमी भुजा की समबाहु त्रिभुज है।

हल : लम्ब प्रिज़्म का आयतन = (आधार का क्षेत्रफल) × ऊंचाई

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 10 \text{ सेमी}^3$$

$$= 90\sqrt{3} \text{ सेमी}^3 = 155.88 \text{ सेमी}^3$$

($\sqrt{3} = 1.732$ लेने पर)

उदाहरण 5 : किसी लम्ब प्रिज्म का आधार 173 सेमी^{2} क्षेत्रफल का समबाहु त्रिभुज है। प्रिज्म का आयतन 10380 सेमी^{3} है। प्रिज्म की ऊंचाई तथा पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए [$\sqrt{3} = 1.73$ लीजिए]

हल : a भुजा के समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

दिया है आधार का क्षेत्रफल $=$ 173 सेमी^{2}।

अतः $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 173$

या $\frac{1.73}{4}a^2 = 173$

अर्थात् $a = 20$

अतः प्रिज़्म के आधार की भुजा $=$ 20 सेमी

पुनः, प्रिज़्म का आयतन $=$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ ऊंचाई

या $10380 = 173 \times h$

जहाँ h प्रिज़्म की ऊंचाई है।

या $h =$ 60 सेमी

अर्थात प्रिज़्म की ऊंचाई 60 सेमी है।

प्रश्नावली 17.1

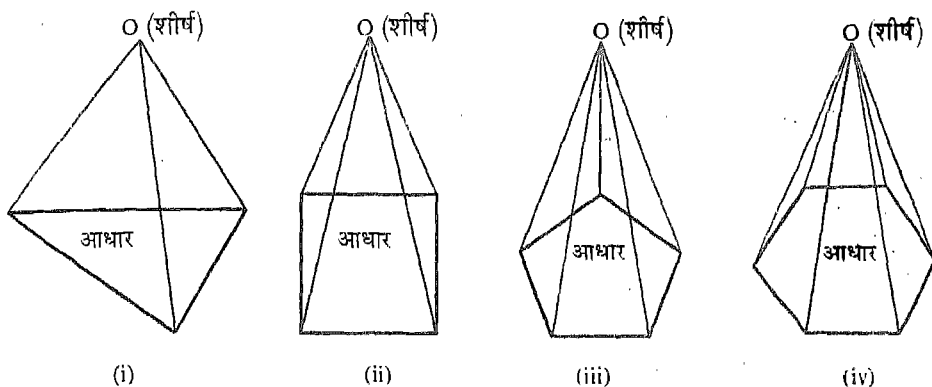
1. लम्ब प्रिज़्मों का आयतन निकालिए जिनके
   (i) आधार का क्षेत्रफल $= 242$ सेमी^{2}, ऊंचाई $= 30$ सेमी है।
   (ii) आधार का क्षेत्रफल $= 350$ सेमी^{2}, ऊंचाई $= 24$ सेमी है।

2. निम्न लम्ब प्रिज़्मों की ऊंचाई ज्ञात कीजिए जिसका
   (i) आयतन $= 1500$ सेमी^{3}, आधार का क्षेत्रफल $= 150$ सेमी^{2}, है
   (ii) आयतन $= 6090$ सेमी^{3}, आधार का क्षेत्रफल $= 725$ सेमी^{2}, है।

3. निम्न लम्ब प्रिज़्मों का आधार समबाहु त्रिभुज है। उनके पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफलों को निकालिए जबकि दिया है कि
   (i) आधार के प्रत्येक भुजा की लम्बाई = 8 सेमी, ऊंचाई = 10 सेमी
   (ii) समबाहु त्रिभुज वाले आधार का क्षेत्रफल = $64\sqrt{3}$ सेमी^{2}, ऊंचाई = 32 सेमी
   (iii) प्रिज़्म की प्रत्येक कोर = 4 सेमी।
4. किसी लम्ब प्रिज़्म का आयतन, जिसका आधार समबाहु त्रिभुज है, $250\sqrt{3}$ सेमी^{3} है। प्रिज़्म का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि उसकी ऊंचाई 10 सेमी हो।
5. किसी लम्ब प्रिज़्म का आधार 7 सेमी भुजा का समबाहु त्रिभुज है। प्रिज़्म का आयतन ज्ञात कीजिए यदि उसकी ऊंचाई 24 सेमी है।
6. किसी लम्ब प्रिज़्म का आधार समबाहु त्रिभुज है। उसका पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल 120 सेमी^{2} तथा आयतन $40\sqrt{3}$ सेमी^{3} है। प्रिज़्म की ऊंचाई तथा आधार की भुजा निकालिए।
7. लम्ब प्रिज़्म का आधार समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी लम्बी है। प्रिज़्म की ऊंचाई निकालिए जबकि उसका आयतन $50\sqrt{3}$ सेमी^{3} है।
8. लम्ब प्रिज़्म का आधार 6 मी भुजा का समबाहु त्रिभुज है। उसका पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल 72 मी^{2} है। प्रिज़्म की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

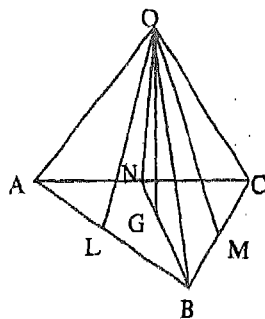
17.6 पिरैमिड

प्रिज़्म की तरह, पिरैमिड भी त्रिविमीय ठोस आकृति है। इस आकृति ने मनुष्य समुदाय को प्राचीन काल से आकर्षित कर रखा है। आपने सम्भवतः मिस्र के पिरैमिडो के बारे में पढ़ा होगा जो संसार के सात आश्चर्यों में से एक है। ये पिरैमिड 3000-2000 ई०पू० काल के बने है। ये पिरैमिड, वर्ग आधार पर बने पिरैमिडो के सटीक नमूने हैं। उनका निर्माण कैसे हुआ? कोई नही जानता। पिरैमिड क्या हैं? इस प्रश्न का उत्तर ढूढ़ पाना कठिन नहीं है यदि हम निम्न आकृतियों की रचना का सावधानी पूर्वक निरीक्षण करें।

हम ध्यान पूर्वक देखने से पाते हैं कि 17.5 के आकृति के पार्श्व (तिरछे) पृष्ठ त्रिभुजीय है। सभी त्रिभुजों का एक उभयनिष्ठ शीर्ष O है जो आधार में नहीं है। आधार विभिन्न आकृतियों का समतल है (आकृति 17.5) की आकृतियां पिरैमिड हैं।

आकृति 17.5

इस प्रकार हम पिरैमिड को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं:

पिरैमिड समतल पृष्ठों से बनी ठोस आकृतियां है, जिसमें से एक, जिसे आधार कहते हैं, एक सरलरेखीय आकृति हैं तथा शेष पृष्ठ त्रिभुज हैं जिनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष आधार तल के बाहर है।

त्रिभुजीय आधार वाले पिरैमिड को चतुष्फलक (Tetrahedron : Tetra का अर्थ चार, hedron का अर्थ फलक) कहते हैं (आकृति 17.6)। इसके चार त्रिभुजीय पृष्ठ OAB, OBC, OCA तथा ABC छ: कोरें OA, OB, OC, AB, BC तथा CA, चार शीर्ष O, A, B, तथा C हैं। इन चार पृष्ठों में से किसी को भी हम चतुष्फलक का आधार मान सकते हैं। चतुष्फलक के अतिरिक्त अन्य पिरैमिडों का नाम उनके आधार के अनुसार रखा जाता है जैसे वर्गाकार पिरैमिड, पंचभुजीय पिरैमिड, षट्भुजीय पिरैमिड आदि [आकृति 17.5(ii), (iii), (iv)]।

आकृति 17.6

17.7 लम्ब पिरैमिड

हम ऐसे पिरैमिड पर विचार करेंगे जिसका शीर्ष O हो तथा आधार समबाहु त्रिभुज ABC हो। इसे (O, ABC) से प्रदर्शित करेंगे (आकृति 17.6) माना G त्रिभुज ABC का केन्द्रक (अंत:केन्द्र, वाह्य केन्द्र) है। जब रेखाखण्ड OG जो शीर्ष O को पिरैमिड (चतुष्फलक) के आधार के केन्द्रक G से मिलाती है, आधार ABC पर लम्ब होती

है, तो उसी पिरैमिड को *लम्ब पिरैमिड* तथा रेखाखण्ड OG की लम्बाई को पिरैमिड की *ऊंचाई* कहते हैं। यह दर्शाया जा सकता है कि यदि हम शीर्ष O को AB, BC, CA के मध्यबिन्दुओं क्रमशः L, M, N से मिलाये तो OL = OM = ON [पढ़िये उदाहरण 5(ii)] लम्ब पिरैमिड की *तिर्यक* ऊंचाई उस रेखाखण्ड की लम्बाई होती है जो शीर्ष को आधार की भुजा के किसी मध्य बिन्दु को मिलाती है। आकृति 17.6 में, लम्बाई (OM, ON, LA, OL) पिरैमिड की तिर्यक ऊंचाई है। हम केवल ऐसे लम्ब पिरैमिडो पर केन्द्रित रहेंगे जिनके आधार समबाहु त्रिभुज हैं।

उदाहरण 6 : किसी लम्ब पिरैमिड के लिए जिसका आधार समबाहु त्रिभुज है, निम्न सिद्ध कीजिए।

(i) पार्श्व कोरें लम्बाई में बराबर होती हैं।

(ii) शीर्ष को आधार की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से मिलाने वाले रेखाखण्ड बराबर होते हैं।

हल : (i) माना (O, ABC) दिया हुआ पिरैमिड है जिसका आधार समबाहु बराबर है। माना, G त्रिभुज ABC का केन्द्रक है।

चूँकि त्रिभुज ABC का G केन्द्रक है, अतः GA = GB = GC

रेखाखण्ड OG आधार ABC पर समकोण है

अतः OGA, OGB तथा OGC समकोण त्रिभुज हैं।

समकोण त्रिभुज OGA में

$$OA = \sqrt{OG^2 + GA^2}$$
$$= \sqrt{h^2 + x^2}$$

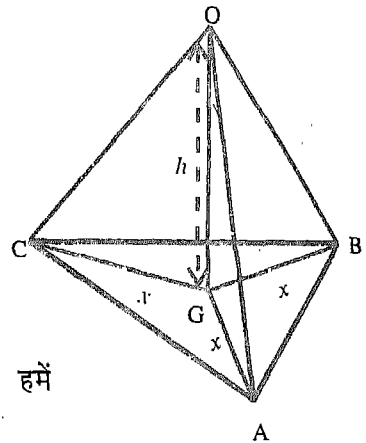
जहाँ $OG = h$, $GA = GB = GC = x$,

इसी प्रकार समकोण त्रिभुजों OGB तथा OGC से हमें

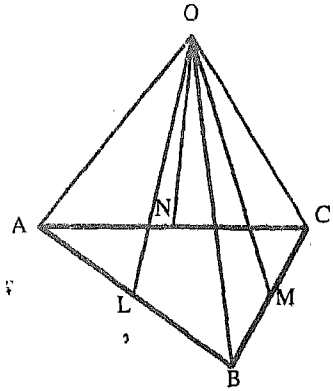
$$OB = \sqrt{h^2 + x^2} \text{ तथा}$$

$$OC = \sqrt{h^2 + x^2} \text{ प्राप्त होगा।}$$

आकृति 17.7

अतः OA = OB = OC इस प्रकार पार्श्व कोरें लम्बाई में बराबर होती है।

(ii) हमने (i) में सिद्ध किया है कि पार्श्व कोरें लम्बाई में बराबर होती हैं। इससे पिरैमिड के पार्श्व पृष्ठ OAB, OBC तथा OCA सर्वांगसम समद्विबाहु त्रिभुज होंगे। इसके फलखरूप सर्वांगसम त्रिभुजों की माध्यिकाएँ OL, OM तथा ON लम्बाई में बराबर होगी (आकृति 17.8)।

यह बराबर लम्बाई पिरैमिड की *तिर्यक ऊंचाई* है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि OL, OM, ON, त्रिभुज की भुजाओं AB, BC तथा CA के क्रमशः लम्ब समद्विभाजक हैं।

आकृति 17.8

17.8 लम्ब पिरैमिड का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल

लम्ब पिरैमिड जिसका आधार समबाहु त्रिभुज है उसके पार्श्व पृष्ठों के क्षेत्रफल के योग को लम्ब पिरैमिड का *पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल* कहते हैं। समबाहु त्रिभुज के आधार वाले लम्ब पिरैमिड के लिए

$$\text{पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ (\text{आधार का परिमाप}) \times \text{तिर्यक ऊंचाई}$$

$$= \frac{3a}{2} \times \ell$$

जहाँ a समबाहु त्रिभुज की भुजा की लमबाई तथा ℓ पिरैमिड की तिर्यक ऊंचाई है।

17.9 लम्ब पिरैमिड का आयतन

हम बिना सिद्ध किए लम्ब पिरैमिड के आयतन का सूत्र दे रहे हैं।

$$\text{लम्ब पिरैमिड का आयतन} = \frac{1}{3}\ (\text{आधार का क्षेत्रफल}) \times \text{ऊंचाई}$$

जब आधार, a भुजा का समबाहु त्रिभुज है उसका क्षेत्रफल $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ होता है। अतः

$$\text{समबाहु त्रिभुज के आधार वाले लम्ब पिरैमिड का आयतन} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \times h$$

जहां a, आधार के प्रत्येक भुजा की लम्बाई तथा h पिरैमिड की ऊंचाई है।

टिप्पणी : (1) लम्ब पिरैमिड, जिसका आधार समबाहु त्रिभुज है, उसके आयतन के सूत्र की पुष्टि निम्न प्रकार से की जा सकती है। एक खाली बर्तन लीजिए जिसका आकार समबाहु त्रिभुजाकार आधार वाला लम्ब प्रिज़्य हो तथा ऊपरी सिरा खुला हो। एक दूसरा खाली बर्तन लीजिए जो लम्ब पिरैमिड के आकार का हो जिसकी ऊंचाई तथा त्रिभुजाकार आधार का क्षेत्रफल प्रिज़्म को ऊंचाई तथा आधार के क्षेत्रफल के बराबर हो। पिरैमिड का आधार खुला हो। अब इस चतुष्फलक के आकार वाले बर्तन में कोई द्रव भरकर तीन बार प्रिज़्म के आकार वाले बर्तन में डालिए। अब पायेंगे कि प्रिज्म आकार वाला बर्तन द्रव से लबालब भर गया है। इससे यह सिद्ध होता है कि पिरैमिड का आयतन, प्रिज़्म के आयतन का एक-तिहाई भाग है। इसी बात को पिरैमिड के आयतन का सूत्र भी प्रकट करता है।

(2) उपरोक्त पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन का सूत्र उन सभी लम्ब पिरैमिडों के लिए भी सत्य है जिनका आधार सम बहुभुज है।

अब हम कुछ उदाहरणों के द्वारा सूत्रों का प्रयोग करना सीखेंगे।

उदाहरण 7 : किसी लम्ब पिरैमिड का आधार समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 2 मी लम्बी है। प्रत्येक तिरछी कोर 3 मी लम्बी है। पिरैमिड का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : माना (O, ABC) दिया हुआ पिरैमिड है। उनके पार्श्वपृष्ठ OAB, OBC तथा OCA समद्विबाहु त्रिभुज हैं (आकृति 17.9)। माना $OG = h$ मी ऊंचाई तथा $OD = l$ मी पिरैमिड की तिरछी ऊंचाई है। तब समकोण त्रिभुज ODB से

$$OD = \sqrt{OB^2 - BD^2}$$

या $\quad l = \sqrt{9-1}$ मी ($\because OB = 3$ मी, $BD = \frac{1}{2} AB = 1$ मी)

या $\quad l = \sqrt{8}$ मी

$\quad\quad = 2\sqrt{2}$ मी $\quad\quad$ (1)

समबाहु त्रिभुज के आधार वाले पिरैमिड का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \text{ (आधार का परिमाप)} \times \text{ तिरछी ऊंचाई}$$

$$= \frac{1}{2}(2+2+2) \times 2\sqrt{2} \text{ मी}^2$$

$$= 6\sqrt{2} \text{ मी}^2$$

पुनः समकोण त्रिभुज CDB से माध्यक

$$CD = \sqrt{CB^2 - DB^2}$$

$$= \sqrt{4-1} \text{ मी } (\because CB = 2 \text{ मी}, DB = 1 \text{ मी})$$

$$= \sqrt{3} \text{ मी}$$

$$\therefore \quad GD = \frac{1}{3} CD = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ मी} \quad (2)$$

अब समकोण त्रिभुज OGD से

$$OG = \sqrt{OD^2 - GD^2}$$

$$= \sqrt{8 - \frac{1}{3}} \text{ मी}$$

आकृति 17.9

$$\text{या ऊंचाई } h = \sqrt{\frac{23}{3}} \text{ मी} \quad (3)$$

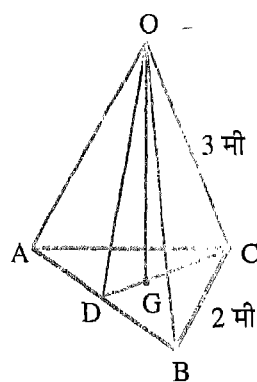
$$\text{आधार का क्षेत्रफल AOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2$$

$$= \sqrt{3} \text{ मी}^2 \quad (4)$$

इस प्रकार पिरैमिड का आयतन $= \frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊंचाई

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{23}{3}} \text{ मी}^3 \text{ [(3) तथा (4) से]}$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{3} \text{ मी}^3$$

उदाहरण 8 : लम्ब पिरैमिड का आधार 4 सेमी भुजा का एक समबाहु त्रिभुज है। पिरैमिड की ऊंचाई उसकी तिरछी ऊंचाई की आधी है। पिरैमिड का आयतन और उसकी एक तिरछी कोर की लम्बाई निकालिए।

हल : माना (O, ABC) दिया हुआ लम्ब पिरैमिड है, D भुजा BC का मध्य बिन्दु तथा G त्रिभुज ABC का केन्द्रक है। तब पिरैमिड की ऊंचाई OG तथा उसकी तिरछी ऊंचाई OD है। दिया है कि

$$OG = \frac{1}{2} OD \qquad (1)$$

क्योंकि AD, CB पर लम्ब है इसलिए ADB समकोण त्रिभुज है। समकोण त्रिभुज ADB से

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{AB^2 - (\frac{BC}{2})^2}$$

$$= \sqrt{16-4} \text{ सेमी } (\because AB = BC = 4 \text{ सेमी})$$

$$= 2\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

आकृति 17.10

पुनः

$$GD = \frac{1}{3} AD$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ सेमी} \qquad (2)$$

अब त्रिभुज OGD से जो G पर समकोण है

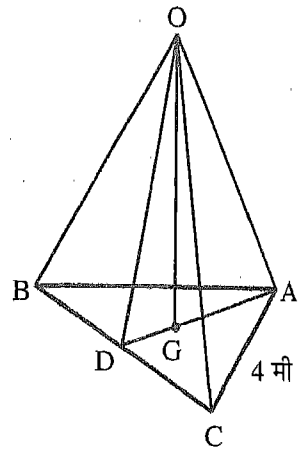
$$OD^2 = OG^2 + GD^2$$

$$= \frac{1}{4}OD^2 + \frac{4}{3} \qquad [(1) \text{ और } (2) \text{ से}]$$

या

$$\frac{3}{4}OD^2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad OD = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \text{ सेमी}$$

अतः (1) से ऊंचाई $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ सेमी

समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$ सेमी^{2}

$= 4\sqrt{3}$ सेमी^{2}

पिरैमिड का आयतन $= \frac{1}{3}$ (ΔABC का क्षेत्रफल) × ऊंचाई

$= \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{2}{3}$ सेमी^{3}

$= \frac{8}{9}\sqrt{3}$ सेमी^{3}

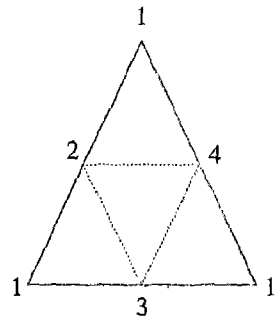
तिरछी कोर OB $= \sqrt{OD^2 + DB^2}$ ($\because$ ΔODB, D पर समकोण है)

$= \sqrt{\frac{16}{9} + 4}$ सेमी

$= \frac{2\sqrt{13}}{3}$ सेमी

17.10 सम चतुष्फलक

सम चतुष्फलक : जिसके सभी कोरें लम्बाई में बराबर होती है, सम चतुष्फलक कहलाती है। कोरें समान होने के कारण सम चतुष्फलक के चारो पृष्ठ सर्वांगसम समबाहु त्रिभुज होते हैं।

नोट : उस समतल आकृति को जिसको मोड़कर जोड़ने पर किसी ठोस का नमूना प्राप्त होता है, ठोस का जाल (net) कहते हैं। आकृति 17.11 में सम चतुष्फलक का नेट दर्शाया गया है। 2, 3, 4 द्वारा चिन्हित बिन्दु, समबाहु त्रिभुज की भुजाओं के मध्यबिन्दु हैं जिसके शीर्षों को 1 से चिन्हित किया गया है। चतुष्फलक को बनाने के लिए, रेखाओं के अनुदिश उस अवस्था तक मोड़िये जब तक कि 1 द्वारा चिन्हित शीर्ष आपस में मिल न जाएँ।

आकृति 17.11

उदाहरण 9 : सम चतुष्फलक जिसके प्रत्येक कोरों की लम्बाई $2a$ है, उसकी (i) तिरछी ऊंचाई (ii) सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (iii) ऊंचाई तथा (iv) आयतन, ज्ञात कीजिए।

हल : माना (O, ABC) दिया हुआ सम चतुष्फलक है जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई $2a$ है। माना त्रिभुज ABC की माध्यिका $2a$ तथा $OG = h$ चतुष्फलक की ऊंचाई है। तब समकोण त्रिभुज OGA से जो G पर समकोण है, हम पाते है

$$GA = \sqrt{OA^2 - OG^2} = \sqrt{4a^2 - h^2}$$

यही मान हमें GB तथा GA के लिए भी प्राप्त होता है जो कि दर्शाता है कि G, आधार ABC का केन्द्रक है। अत: सम चतुष्फलक एक लम्ब चतुष्फलक होता है।

(i) त्रिभुज OMB से जो M पर समकोण है, प्राप्त होता है

$$OM = \sqrt{OB^2 - MB^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 - a^2} \text{ (}\because \text{ M, BC का मध्य बिन्दु है } \therefore MB = \frac{BC}{2} = a)$$

या $OM = a\sqrt{3}$, अत: तिरछी ऊंचाई $= a\sqrt{3}$

(ii) सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $S = 4 \times$ त्रिभुज OBC का क्षेत्रफल

$$= 4 \times \frac{1}{2}(BC \times OM)$$

$$= 2 \times 2a \times a\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$$

आकृति 17.12

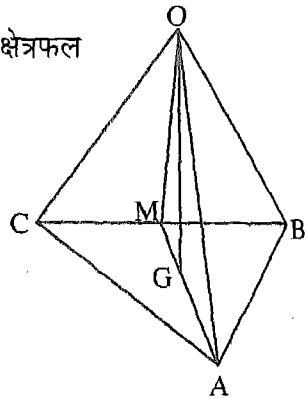
(iii) समकोण त्रिभुज OGA से जो G पर समकोण है

$$OG^2 = OA^2 - GA^2$$

$$= OA^2 - (\frac{2}{3} AM)^2$$

$$= 4a^2 - (\frac{4}{9})(a\sqrt{3})^2 \quad (\because AM = OM = a\sqrt{3})$$

$$= \frac{8a^2}{3}$$

अत: ऊंचाई $h = OG = 2a\sqrt{\frac{2}{3}} = 2a\frac{\sqrt{6}}{3}$

(iv) चतुष्फलक (O, ABC) का आयतन

$= \frac{1}{3}$ (त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल) $\times$ ऊंचाई

$= \frac{1}{3} \times (\frac{\sqrt{3}}{4})(2a)^2 \times 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\because$ समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (भुजा)^2)

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$

प्रश्नावली 17.2

1. निम्न लम्ब पिरैमिडों का आयतन ज्ञात कीजिए:

   (i) आधार का क्षेत्रफल $= 50$ सेमी^{2}, ऊंचाई $= 9$ सेमी

   (ii) आधार का क्षेत्रफल $= 215$ सेमी^{2}, ऊंचाई $= 42$ सेमी

2. निम्न लम्ब पिरैमिडों की ऊंचाई निकालिए:

   (i) आयतन $= 150$ सेमी^{3}, आधार का क्षेत्रफल $= 50$ सेमी^{2}

   (ii) आयतन $= 24$ सेमी^{3}, आधार का क्षेत्रफल $= 16$ सेमी^{2}

3. निम्न पिरैमिडों का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल निकालिए जिनमें

   (i) आधार के प्रत्येक भुजा की लम्बाई $= 4$ सेमी, तिरछी ऊंचाई $= 5$ सेमी

   (ii) समबाहु त्रिभुज वाले आधार का क्षेत्रफल $= 16\sqrt{3}$ सेमी^{2}, प्रत्येक पार्श्व कोर की लम्बाई $= 5$ सेमी

   (iii) पिरैमिड के प्रत्येक कोर की लम्बाई $= 10$ सेमी

4. लम्ब पिरैमिड का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊंचाई 4 मी और जिसका आधार 1 मी भुजा का समबाहु त्रिभुज है।

5. लम्ब पिरैमिड का आधार समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजाएं 6 सेमी लम्बी हैं। पिरैमिड का आयतन ज्ञात कीजिए यदि उसकी ऊंचाई 12 सेमी हो।

6. सम चतुष्फलक के एक भुजा की लम्बाई 4 सेमी है। चतुष्फलक का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

7. घन के कोरों की लम्बाई 24 सेमी है। वह एक समतल द्वारा इस प्रकार काटा जाता है कि उसकी तीन एक बिन्दुगामी भुजाएं अपने मूल लम्बाई की आधी रह जाती हैं। पिरैमिड का आयतन ज्ञात कीजिये।
   [संकेत : प्रत्येक पार्श्व कोर 12 सेमी और आधार $12\sqrt{2}$ सेमी भुजा का समबाहु त्रिभुज है।]

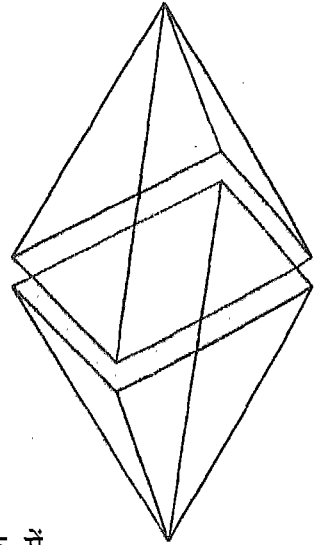
8. लम्ब पिरैमिड का आधार 10 सेमी भुजा का समबाहु त्रिभुज है और उसकी उर्ध्व ऊंचाई 5 सेमी है। निकालिए (i) तिरछी ऊंचाई (ii) एक किनारे के पृष्ठ का क्षेत्रफल।

9. लम्ब पिरैमिड का आधार 4 इकाई भुजा का समबाहु त्रिभुज है। यदि सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल का आंकिक मान उसके आयतन के आंकिक मान का तिगुज हो तो, उसकी ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

10. दर्शाइए कि h ऊंचाई के सम चतुष्फलक का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन क्रमश: $\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2$ तथा $\frac{\sqrt{3}}{8}h^3$ हैं।

11. समचतुष्फलक में जिसकी प्रत्येक भुजा $2a$ है, यदि एक शीर्ष से सम्मुख पृष्ठ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p हो, तो दिखाइए कि $3p^2 = 8a^2$

17.11 सम अष्टफलक (Regular Octahedron)

दो एक ही प्रकार के खोखले पिरैमिडों की कल्पना कीजिए, जिनके आधार वर्ग हों तथा पार्श्वष्फलकें समबाहु त्रिभुज हों (आकृति 17.13) यदि हम प्रत्येक पिरैमिड के सिरों को इस प्रकार मिलाएं कि उनके शीर्ष आपस में जुड़ जाएं, तो हमें आकृति 17.14 में प्रदर्शित ठोस आकृति मिलेगी। इस ठोस आकृति के आठ सर्वांगसम फलकें हैं और प्रत्येक फलक समबाहु त्रिभुज् हैं। इस आकृति को *सम अष्टफलक* कहते हैं। अत: एक सम अष्ट फलक आठ समान समबाहु त्रिभुजों से बनी ठोस आकृति है।

आकृति 17.13

हम स्पष्ट रूप से देख सकते हें कि एक सम अष्टफलक में

(i) बारह कोरें बराबर लम्बाई की होती है। यह कोरें EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC, FD, AB, BC, CD और DA हैं।

(ii) छ: शीर्ष A, B, C, D, E तथा F हैं।

(iii) समान लम्बाई के तीन विकर्ण AC, BD तथा EF हैं। ये विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं। उनका एक उभयनिष्ठ मध्यबिन्दु होता है जो O पर है तथा जिसको अष्टफलक का केन्द्र कहते हैं।

आकृति 17.14

जितने प्रकार के ठोस हम पढ़ चुके हैं, सभी बहुफलक आकृति के हैं। बहुफलक के पृष्ठ, बहुभुज फलक होते हैं। यदि बहुफलक में कोई छेद नही है तो उसे सरल (simple) बहुफलक कहते हैं। जितने भी बहुफलकें (पालिहेड्रा) हम पढ़ चुके है, सभी सरल हैं। आयलर (1707–1783) जो महान स्विस (Swiss) गणितज्ञ या और जिसने अपना अधिकांश समय जार (Czar) से छात्रवृति पाकर रूस में व्यतीत किया, उसने खोजा कि सभी सरल बहुफलकों के लिए

$$F - E + V = 2$$

होता है, जहां F, E तथा V क्रमशः फलकों, कोरों तथा शीर्षों की संख्या प्रदर्शित करती हैं। इसको हम *आयलर का सूत्र* कहते हैं।

उदाहरण 10 : चतुष्फलक के लिए आयलर सूत्र की पुष्टि कीजिए।

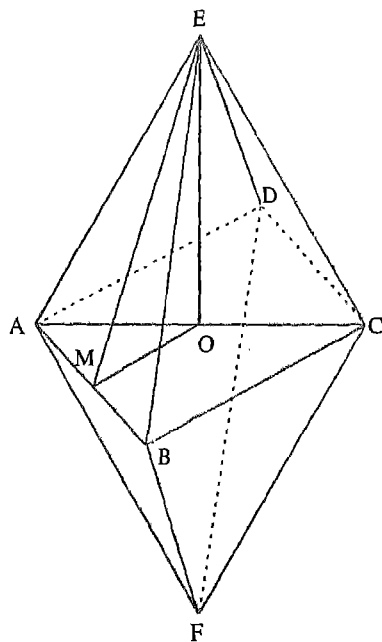
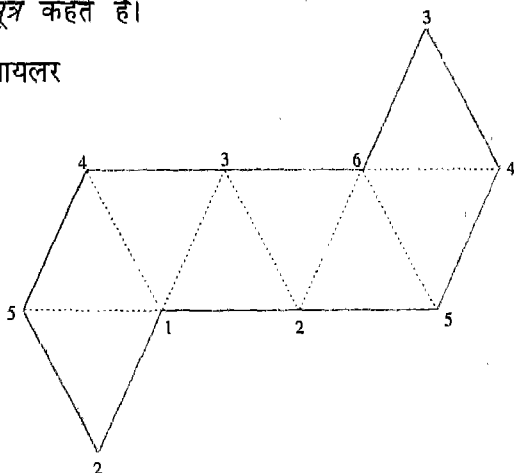
हल : चतुष्फलक में

(i) फलकों की संख्या, $F = 4$

(ii) कोरों की संख्या, $E = 6$

(iii) शीर्षों की संख्या, $V = 4$

इस प्रकार, $F - E + V = 4 - 6 + 4 = 2$

अतः आयलर सूत्र सत्य है।

आकृति 17.15

टिप्पणी : 1. सम अष्टफलक के जाल को आकृति 17.15 में दिखाया गया है। सम अष्ट फलक बनाने के लिए चिन्हित रेखाओं के अनुदिश कागज को इस प्रकार मोड़िए कि समान अंको से चिन्हित शीर्ष आपस में मिल जायें।

2. पांच भिन्न प्रकार के समफलक निम्न है। (i) सम डूडेकाहेड्रन जो बारह सम पंचभुज फलकों से परिबद्ध होता है इसमें तीस कोरें तथा बीस शीर्ष होते हैं। (ii) घन (सम छः फलक) (iii) समचतुष्फलक (iv) सम अष्टफलक (v) सम आइकोसाहेड्रान (Icosahedron) जिसमें बीस फलकें, तीस कोरें तथा बारह शीर्ष होते हैं। समबाहु त्रिभुजों से (iii), (iv) तथा (v) की आकृति बनती हैं।

प्रश्नावली 17.3

1. निम्न सारिणी में रिक्त स्थानों को भरिए, जहाँ F, E तथा V बहुफलकों के, फलकों, कोरों तथा शीर्षों को क्रमशः प्रदर्शित करते हैं।

क्रम सं०	बहुफलक का नाम	F	E	V	F-E+V
(i)	घनाम				
(ii)	त्रिभुजाकार प्रिज़्म	–	–	–	–
(iii)	पंचभुजीय प्रिज़्म	–	–	–	–
(iv)	पिरैमिड, चतुर्भुज आधार वाला	–	–	–	–
(v)	षटभुजीय पिरैमिड	–	–	–	–

2. निम्न में कितने फलके, कोरें तथा शीर्ष होते हैं
   (i) प्रिज़्म (ii) पिरैमिड
   में जिनका आधार n भुजाओं वाला बहुभुज है?

3. खाली जगह भरिए :
   (i) बहुभुज, जिसमें 4 फलकें तथा चार शीर्ष है, उसमें कुल कोरों की संख्या ....
   (ii) बहुभुज, जिसमें 20 फलकें और 30 कोर हैं, उसमें कुल शीर्षों की संख्या

(iii) बहुभुज, जिसमें 30 कोरें तथा 20 शीर्ष हैं, उसमें कुल फलकों की संख्या ....

(iv) प्रिज़्म में जिसमें 24 कोर हैं, कुल फलकों की संख्या ....

(v) पिरैमिड जिसमें 8 कोर हैं, कुल फलकों की संख्या ....

4. पिरैमिड, जिसका आधार सम बहुभुज है, उसका सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल 200 सेमी^{2} है, तथा आधार का क्षेत्रफल 80 सेमी^{2} है। यदि प्रत्येक पार्श्वफलक का क्षेत्रफल 20 सेमी^{2} हो तो पार्श्वफलकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

अध्याय 18

सांख्यिकी

18.1 भूमिका

प्रतिदिन हमें समाचार पत्रों, रेडियो, दूरदर्शन और संचार के अन्य माध्यमों से आँकड़ों, सारणियों, आलेखों आदि के रूप में भिन्न प्रकार की सूचनाओं से सामना होता रहता है। ये संख्यात्मक अंक निम्न में से किसी से संबंधित हो सकते हैं :

(i) भिन्न देशों के आयात एवं निर्यात

(ii) उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के रूप में मुद्रास्फीति दर

(iii) प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय

(iv) जनसंख्या आँकड़ों की तुलना में अन्न उत्पादन

(v) स्टाक एक्सचेंज सेन्सेक्स दर

(vi) शहरों के न्यूनतम और महत्तम तापमान

(vii) किसी क्रिकेट टीम के रन बनाने एवं गेंदबाजी के औसत

इन संख्यात्मक अंकों को *आँकड़े* (data) कहते हैं। ये आँकड़े केवल योजनाकारों की ही सहायता नहीं करते बल्कि सामान्य नागरिक के जीवन के लगभग सभी क्षेत्रों में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसलिए ऐसे आँकड़ों से प्रासंगिक शुद्ध सूचना प्राप्त करने की विधि को जानना आवश्यक हो गया है। सांख्यिकी वह विज्ञान है जो इस संबंध में हमारी सहायता करता है।

अंग्रेजी में सांख्यिकी को स्टेटिस्टिक्स (Statistics) कहते हैं। शब्द स्टेटिस्टिक्स की उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द *स्टेटस* (Status) से हुई है, जिसका अर्थ है *'एक (राजनैतिक) राज्य'*। मूलरूप से सांख्यिकी का उपयोग उन संख्यात्मक आँकड़ों को

एकत्रित करने में किया जाता था जो कि राज्य के लिए उपयोगी हों, जैसे कि शस्त्रागार, सेना, करों, भू-राजस्व या आयात-निर्यात होने वाली वस्तुओं के आँकड़े। समय के साथ सांख्यिकी का क्षेत्र भी बढ़ता गया। इसमें जीवन के हर क्षेत्र से संबंधित आँकड़ों का संग्रह और उन्हें सारणियों, संचित्रों और आलेखों के रूप में प्रस्तुतीकरण भी समाहित हो गया। 19 वीं सदी के अंत तक सांख्यिकी का संबंध न केवल आँकड़ों के एकत्रीकरण, प्रस्तुतीकरण और सारणीयन से ही रह गया था, अपितु इसके अंतर्गत उनसे निष्कर्ष निकालना और उनका विवेचन करना भी सम्मिलित हो गया।

18.2 सांख्यिकी और सांख्यिकीय आँकड़े

शब्द सांख्यिकी का उपयोग इसके एकवचन एवं बहुवचन दोनों अर्थों में किया जाता है। एकवचन के अर्थ में सांख्यिकी एक विज्ञान है जो कि आँकड़ों के संग्रहण, प्रदर्शन और उनसे तर्कयुक्त निर्णय लेने से संबंधित है। बहुवचन के अर्थ में, सांख्यिकी उन संख्यात्मक तथ्यों या प्रेक्षणों को कहते हैं जिन्हें किसी विशिष्ट ध्येय से संकलित किया गया है। उदाहरणार्थ, देश की जनसंख्या, देश का आयात और निर्यात, प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय, सड़क दुर्घटनाओं की संख्या आदि के सांख्यिकीय आँकड़े।

संख्यात्मक आँकड़ों के रूप में, सांख्यिकी में निम्न विशेषताएँ होनी चाहिए :

(i) जहाँ तक संभव हो, वे परिमाणात्मक होना चाहिए, गुणात्मक नहीं।

(ii) सांख्यिकीय आँकड़े प्रेक्षणों का समूह होता है। केवल एक प्रेक्षण को सांख्यिकी नहीं कहा जा सकता।

(iii) सांख्यिकीय आँकड़ों का संकलन किसी पूर्व निर्धारित उद्देश्य के लिए किया जाना चाहिए।

(iv) किसी सांख्यिकीय-प्रयोग में आँकड़े तुलनीय होने चाहिए।

18.3 प्राथमिक एवं गौण आँकड़े

सांख्यिकीय आँकड़े दो प्रकार के होते हैं-प्राथमिक आँकड़े एवं गौण आँकड़े। यदि कोई अनुसन्धानकर्ता किसी उद्देश्य या योजना को ध्यान में रखकर स्वयं आँकड़ों का संग्रह करता है, तो इन आँकड़ों को *प्राथमिक आँकड़े* (Primary data) कहते हैं। इसलिए ये आँकड़े बहुत अधिक विश्वसनीय और प्रासंगिक होते हैं। किन्तु, समय, धन या अन्य

साधनों के अभाव में, अनुसन्धानकर्ता के लिए, प्राथमिक आँकड़े संग्रह करना सदा सम्भव नहीं होता। उस स्थिति में वह, किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संग्रह किए गए आँकड़ों का या शासकीय विभागों में उपलब्ध प्रकाशित रिपोर्ट, शोध प्रबंध आदि का प्रयोग करता है, क्योंकि वही आँकड़े भिन्न-भिन्न उद्देश्यों की पूर्ति में सहायक हो सकते हैं, इसीलिए यह सम्भव है कि एक व्यक्ति द्वारा संग्रह किए गए आँकड़े, दूसरा व्यक्ति अपने संबंधित अध्ययन के लिए प्रयोग कर ले। ऐसे आँकड़े को जो एक व्यक्ति द्वारा संग्रह किए गए हों और अन्य अनुसंधानकर्ता अपने अध्ययन में प्रयोग कर ले, *गौण आँकड़े* (Secondary data) कहते हैं। गौण आँकड़ों को बड़ी सावधानी से प्रयोग करना होता है क्योंकि इन्हें प्रयोगकर्त्ता के उद्देश्य से भिन्न उद्देश्य से संग्रह किया गया होता है और इसलिए कुछ सूचनाएँ छूट सकती हैं या यह भी हो सकता है कि पूर्ण रूप से वे वर्तमान अनुसंधान के उपयुक्त न हों।

18.4 आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण-अपरिष्कृत/वर्गीकृत आँकड़े

किसी भी अन्वेषण में प्रथम कार्य प्रयोजित उपकरणों से आँकड़ों को संकलित करने का होता है। इस बात की बहुत सावधानी रखनी पड़ती है कि उत्तर देने वाला उपकरण को पहले अच्छी तरह से समझ ले जिससे कि वह प्रासंगिक और यथार्थ सूचना दे। आँकड़ों के संकलन का कार्य पूर्ण होते ही अन्वेषक उनके प्रमुख लक्षणों का अध्ययन करने के लिए ऐसी उपयुक्त विधियों का पता लगाता है जिनसे कि आँकड़ों को संक्षिप्त रूप में संगठित किया जा सके। आँकड़ों के ऐसे विन्यास को *आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण* कहते हैं।

मान लीजिए, कक्षा VIII के किसी वर्ग में 30 विद्यार्थी हैं और एक कक्षा परीक्षा में, कुल 100 अंकों में से उनके प्राप्तांक इस प्रकार हैं :

75, 35, 41, 41, 16, 28, 75, 45, 55, 25
41, 45, 37, 28, 75, 82, 55, 61, 75, 19
75, 61, 19, 28, 19, 61, 28, 25, 16, 16

इस रूप में दिए गए आँकड़ों को *अपरिष्कृत* (Raw) या *अवर्गीकृत* (Ungrouped) आँकड़े कहते हैं।

उपरोक्त अपरिष्कृत आँकड़ों से कक्षा परीक्षा में विद्यार्थियों की उपलब्धि के स्तर की विशेष सूचना नहीं मिलती। हम देखें कि यदि हम इन्हें आरोही या अवरोही क्रम

में रखें, तो क्या हमें समूह की उपलब्धि की श्रेष्ठतर सूचना मिलती है? आरोही क्रम में आँकड़े इस प्रकार दिखाई देते हैं :

16, 16, 16, 19, 19, 19, 25, 25, 28, 28, 28, 28, 35, 37, 41, 41, 41, 45, 45, 55, 55, 61, 61, 61, 75, 75, 75, 75, 75, 82

इस रूप में रखे गए आँकड़ों को *सारणीबद्ध आँकड़े* (arrayed data) कहते हैं। आँकड़ों को इस रूप में प्रस्तुत करना, एक थकाने वाला काम है और समय भी अधिक लेता है, विशेषत: तब जबकि आँकड़ों की संख्या अधिक हो। इन्हें स्पष्ट और अधिक सूचना देने योग्य बनाने के लिए, हम इन आँकड़ों को निम्नानुसार सारणी रूप में रख सकते हैं।

सारणी 18.1

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
16	3
19	3
25	2
28	4
35	1
37	1
41	3
45	2
55	2
61	3
75	5
82	1
योग	30

उपरोक्त सारणी 18.1 में, प्रत्येक अंक के सम्मुख उन विद्यार्थियों की संख्या है जिन्होंने वे अंक प्राप्त किए हैं। उदाहरणार्थ, 5 विद्यार्थियों को 75 अंक प्राप्त हुए और अन्य

4 विद्यार्थियों को 28 अंक मिले। 11 विद्यार्थियों को 50% से अधिक अंक प्राप्त हुए। यदि किसी विद्यार्थी को 33% अंकों पर उत्तीर्ण घोषित किया जाता है, तो अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या 12 है।

उस राशि को जिसे हम भिन्न-भिन्न प्रेक्षणों में मापते हैं, *'विचर'* (variate) कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में *प्राप्त अंक विचर* हैं। अंक विशेष प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को उन अंकों की (या उस विशेष विचर की) *बारंबारता* कहते हैं। इसलिए उपरोक्त सारणी को *'अवर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता' सारणी* कहते हैं।

आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना एक थकाने वाला काम है और समय भी अधिक लेता है और इससे आँकड़ों के अधिकतम मान और निम्नतम मान के अतिरिक्त कोई अन्य विशेष तथ्य प्राप्त नहीं होता। आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण को अधिक अर्थपूर्ण बनाने के लिए हम उन्हें *वर्गों* (Classes) में संगठित करते हैं, सामान्यत: वर्गों की संख्या 10 से अधिक और 5 से कम नहीं होती। आँकड़ों को इस रूप में रखने से हम कुछ प्रमुख लक्षणों का पता एक दृष्टि में ही लगा सकते हैं।

उपरोक्त आँकड़ों को हम वर्गों में इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं:

सारणी 18.2

वर्ग	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)
16 – 25	8
26 – 35	5
36 – 45	6
46 – 55	2
56 – 55	3
66 – 75	5
76 – 85	1
योग	30

इसे *वर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता बंटन सारणी* (frequency distribution table) कहते हैं। यह आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की श्रेष्ठतर विधि है, क्योंकि हम स्पष्टत: कह सकते हैं कि 8 विद्यार्थियों ने 16-25 के परिसर (range) में अंक प्राप्त किए

हैं और केवल एक विद्यार्थी को 75 से अधिक अंक प्राप्त हुए।

उपरोक्त सारणी में विभिन्न वर्ग अंतरालों (class intervals) की निम्न सीमा और उपरि सीमा के बीच अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या दी गई है। प्रथम वर्ग अंतराल अर्थात् (16-25), की निम्न सीमा 16 है और उपरि सीमा 25 है। उन विद्यार्थियों, जिनके प्राप्तांक इस वर्ग-अंतराल में आते हैं, अर्थात् 16 से 25 तक हैं, की संख्या 8 है। इसी प्रकार 66 से 75 तक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 5 है।

ऊपर दी गई सारणी में वर्ग अनतिव्यापी (non overlapping) हैं क्योंकि आँकड़ों में कोई भिन्नात्मक अंक नहीं हैं। किंतु यदि हमें लंबाई, भार या ऊँचाई मापना हो तो उनके मान क्रमशः मीटर, किलोग्राम या मीटर के भिन्नात्मक मान हो सकते हैं।अतः हमें वर्ग अंतरालों को सतत (continuous) बनाना होगा। यह किया जा सकता है यदि हम प्रथम वर्ग को 15.5 से 25.5 तक लें, द्वितीय 25.5 से 35.5 तक, . . . और अंतिम 75.5 से 85.5 तक। इनको *वास्तविक निम्न सीमा* (true lower limit) एवं *वास्तविक उपरि सीमा* (true upper limit) कहते हैं। किसी वर्ग की वास्तविक उपरि सीमा और वास्तविक निम्न सीमा के अंतर से उस वर्ग-अंतराल का आमाप प्राप्त होता है, जिसे *वर्ग-आमाप* (class size) या *वर्ग-अंतराल* (class interval) कहते हैं। इस उदाहरण में वर्ग-आमाप 25.5−15.5 = 10.0 है। किसी वर्ग विशेष के मध्यमान को उस वर्ग का *वर्ग चिह्न* (class mark) कहते हैं। इस प्रकार

$$\text{वर्ग चिह्न} = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा + निम्न वर्ग सीमा}}{2}$$

इस प्रकार, सारणी 18.2 में, 16-25 का वर्ग चिह्न $= \frac{16+25}{2} = 20.5$

इसी प्रकार आगामी वर्गों के वर्ग-चिह्न है :

30.5, 40.5, 50.5, 60.5, 70.5 और 80.5

आपके मन में कुछ निम्न प्रकार के प्रश्न उठ रहे होंगे :

(i) 35.5 के समान अंक को किस वर्ग में रखे?

(ii) वर्गों की संख्या क्या होनी चाहिए?

(ii) प्रत्येक वर्ग का आमाप क्या होना चाहिए?

उपरोक्त और उनसे संबंधित कुछ प्रश्नों के लिए हम निम्नानुसार कुछ मार्गदर्शन देते हैं :

1. वर्ग अनतिव्यापी होना चाहिए।
2. जहाँ तक संभव हो, वर्गों के बीच में कोई रिक्ति न हो।
3. जहाँ तक संभव हो, वर्गआमाप समान हों।
4. जहाँ तक संभव हो, विवृतांत वर्ग (open end class) (जैसे 2 से कम 5 से अधिक) नहीं रखना चाहिए।
5. वर्गों की संख्या 5 से कम एवं 10 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

आँकड़ों से वर्ग बनाने की प्रक्रिया हम निम्न चरणों में पूरी करते हैं :

चरण 1 : आँकड़ों से विचर के न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में ये मान क्रमशः 16 और 82 हैं।

चरण 2 : उपरोक्त दिए गए नियम के अनुसार वर्गों की संख्या निश्चित करते हैं। नियम के अनुसार वर्गों की संख्या 5, 6, 7, 8,.......10 तक हो सकती हैं। उपरोक्त उदाहरण में यह 8 है।

चरण 3 : वर्ग-अंतराल प्राप्त करने के लिए हम अधिकतम मान-न्यूनतम मान के अंतर को वर्गों की निश्चित संख्या से भाग देते हैं! भागफल के निकट एक सुविधाजनक पूर्णांक को वर्ग का आमाप मान लेते हैं। उपरोक्त उदाहरण में $\frac{82-16}{8}$ का निकटतम मान 8 है। अतः सुविधा के लिए हमने वर्ग-आमाप को 10 लिया।

चरण 4 : आँकड़ों में से प्रत्येक संख्या को एक-एक करके लेते हैं और जिस वर्ग में वह संख्या होनी चाहिए, उसके सामने एक मिलान चिह्न लगाते हैं। गणना में सुविधा के लिए हम मिलान चिह्नों को पाँच-पाँच के समूहों में लेते हैं, पाँचवाँ मिलान चिह्न, अन्य चारों को विकर्णतः काटता है (यथा ~~||||~~)।

चरण 5 : गणना करके, हम प्रत्येक वर्ग के मिलान चिह्नों की संख्या ज्ञात करते हैं और यही उस वर्ग की बारंबारता होती है। स्पष्ट है कि सभी बारंबारताओं का योग वही होगा जो कि कुल प्रेक्षणों की संख्या है।

चरण 6 : प्राप्त बारंबारता सारणी को एक उपयुक्त शीर्षक देना चाहिए जिससे कि शीर्षक से ठीक संकेत मिल जाए कि सारणी किस बारे में है।

उदाहरणों की सहायता से यह प्रक्रिया प्रदर्शित करते हैं :

उदाहरण 1 : किसी कालोनी के 25 घरों के बिजली के बिल (रुपयों में) नीचे दिए हैं। वर्ग-आमाप 75 लेकर एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325,

192, 198, 230, 320, 412, 530, 602, 724, 370, 402,

317, 403, 405, 372, 413

हल : (i) आँकड़ों में न्यूनतम संख्या 170 है और अधिकतम 724 है।

(ii) उनका अंतर (724-170) या 554

(iii) क्योंकि वर्ग आमाप 75 है, वर्गों की संख्या है $\frac{554}{75}$ या 8 (निकटतम पूर्णांक संख्या) जो सुझाई गयी सीमाओं के अंतर्गत है।

(iv) इसलिए, वर्ग इस प्रकार है
150-225, 225-300, 300-375, 375-450, 450-525, 525-600, 600-675 और 675-750

इसलिए, हम बारंबारता सारणी की रचना निम्न प्रकार से करते हैं :

सारणी 18.3 : *एक कालोनी के 25 घरों के बिजली के बिलों की बारंबारता सारणी*

बिल (रुपयों में)	मिलान चिह्न	बारंबारता
150-225	||||	4
225-300	|||	3
300-375	~~||||~~||	7
375-450	~~||||~~||	7
450-525		0
525-600	|	1
600-675	|	1
675-750	||	2
	योग	25

टिप्पणी : इस पर ध्यान दीजिए कि यदि वर्गों के उभयनिष्ठ अंत्य बिंदु है, तब अंत्य बिन्दुओं के बीच में होने वाले सब प्रेक्षणों (उपरि वर्ग सीमा को छोड़कर), के मिलान चिह्न उसी वर्ग में रखे जाएँगे जिस पर विचार हो रहा है। उपरि वर्ग सीमा के संगत मिलान चिह्न अगले उच्चतर वर्ग में रखा जाएगा।

उदाहरणार्थ, 150 से 224 तक सभी प्रेक्षणों के मिलान चिह्न वर्ग 150-225 के सम्मुख रखे जायेंगे, लेकिन 225 के संगत मिलान चिह्न वर्ग 225-300 में रखा जाएगा।

किसी वर्ग विशेष की बारंबारता और उससे पूर्व के सभी वर्गों की बारंबारताओं के योग को उस वर्ग विशेष की *संचयी बारंबारता* (cumulative frequency) कहते हैं। संचयी बारंबारताओं को दर्शाने वाली सारणी को *संचयी बारंबारता सारणी* कहते हैं।

टिप्पणी : सारणी 18.1 में दिए गए सारणीबद्ध आँकड़ों की संचयी बारंबारता सारणी निम्न सारणी 18.4 में दी गई है :

सारणी 18.4 : *संचयी बारंबारता सारणी*

अंक तक	विद्यार्थियों की संख्या
16	3
19	6 (= 3 + 3)
25	8 (= 3 + 3 + 2)
28	12 (= 3 + 3 + 2 + 4)
35	13 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1)
37	14 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1)
41	17 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3)
45	19 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3 + 2)
55	21 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2)
61	24 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3)
75	29 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 + 5)
82	30 (= 3 + 3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 + 5 + 1)

अब हम सारणी 18.3 में दिए गए आँकड़ों की संचयी बारंबारता सारणी को सारणी 18.5 में देते हैं।

सारणी 18.5 : *एक उपनगर के 25 घरों के बिजली के बिलों की संचयी बारंबारता बंटन सारणी*

बिल (रुपयों में)	बारंबारता	संचयी बारंबारता
150–225	4	4
225–300	3	7 (= 4 + 3)
300–375	7	14 (= 4 + 3 + 7)
375–450	7	21 (= 4 + 3 + 7 + 7)
450–525	0	21 (= 4 + 3 + 7 + 7 + 0)
525–600	1	22 (= 4 + 3 + 7 + 7 + 0 + 1)
600–675	1	23 (= 4 + 3 + 7 + 7 + 0 + 1 + 1)
675–750	2	25 (= 4 + 3 + 7 + 7 + 0 + 1 + 1 + 2)
योग	25	

हम देखते हैं कि अंतिम वर्ग की संचयी बारंबारता बारंबारताओं की कुल संख्या होती है।

टिप्पणी : 1. किसी भी वर्ग की संचयी बारंबारता = उस वर्ग की बारंबारता + पूर्व वर्ग की संचयी बारंबारता

2. भिन्न वर्गों की वर्ग-आमाप और वर्ग सीमाएँ उनके वर्ग-चिह्नों से निम्नानुसार ज्ञात किए जा सकते हैं :

वर्ग आमाप = दो आसन्न वर्गों के वर्ग चिह्नों का अंतर

निम्न वर्ग सीमा = वर्ग चिह्न - $\frac{1}{2}$ (वर्ग आमाप)

उपरी वर्ग सीमा = वर्ग चिह्न + $\frac{1}{2}$ (वर्ग आमाप)

उदाहरण 2 : किसी बंटन के वर्ग चिह्न हैं :

105, 115, 125, 135, 145, 155, 165, 175

वर्ग आमाप 31-37 एवं वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग 37-43 आमाप = दो आसन्न वर्गों के वर्ग चिह्नों का अंतर

$= 115 - 105 = 10$

हमें 10 आमाप के वर्गों को ज्ञात करना है जिनके वर्ग चिह्न हैं :

105, 115, 125, 135, ... , 175

प्रथम वर्ग की वर्ग सीमाएँ हैं $105 - \frac{10}{2}$ और $105 + \frac{10}{2}$ या 100 और 110। इसलिए प्रथम वर्ग 100-110 है। इसी प्रकार अन्य वर्ग हैं

110–120, 120–130, 130–140, 140–150, 150–160, 160–170, 170–180

उदाहरण 3 : किसी प्राथमिक विद्यालय के 30 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) का बंटन नीचे दिया गया है :

आयु (वर्षों में)	शिक्षकों की संख्या
25–31	8
31–37	13
37–43	5
43–49	3
49–55	1
योग	30

(अ) प्रत्येक वर्ग का वर्ग चिन्ह ज्ञात कीजिए।

(ब) तृतीय वर्ग की उपरि वर्ग सीमा क्या है?

(स) वर्ग आमाप ज्ञात कीजिए।

(द) संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

हल : (अ) वर्ग चिन्ह है $\left(\frac{25+31}{2}=28\right),\left(\frac{31+37}{2}=34\right)$, 40, 46, 52,

(ब) तृतीय वर्ग की उपरि वर्ग सीमा 43 है।

(स) वर्ग आमाप है 34-28 अर्थात् 6

(द) संचयी बारंबारता सारणी नीचे दी गई है :

आयु (वर्षों में)	शिक्षकों की संख्या	संचयी बारंबारता
25-31	8	8
31-37	13	21
37-43	5	26
43-49	3	29
49-55	1	30
योग	30	

प्रश्नावली 18.1

1. *सांख्यिकी* से आप क्या समझते हैं,

   (i) एकवचन में?

   (ii) बहुवचन में?

2. (i) प्राथमिक आँकड़े (ii) गौण आँकड़े, क्या हैं? इन दोनों में से कौन अधिक विश्वसनीय होता है और क्यों?

3. अपरिष्कृत आँकड़ों का वर्गीकरण करने के कारणों को समझाइए। आँकड़ों का वर्गीकरण करने से हमें क्या लाभ मिलता है?

4. निम्नलिखित शब्दों के अर्थ की व्याख्या कीजिए :

   विचर, वर्ग अन्तराल, वर्ग सीमाएँ, वास्तविक वर्ग सीमाएँ

5. किसी वर्ष के जून माह के लिए एक शहर के अधिकतम तापमान (डिग्री सेल्सियस में) और सापेक्ष आर्द्रता (relative humidity) (प्रतिशत में) नीचे दिए गए हैं। प्रत्येक के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

   अधिकतम तापमान (°C)

   32.5, 30.3, 33.8, 31.0, 28.6, 33.9, 33.3, 32.4, 30.4, 32.6
   34.9, 31.6, 35.2, 35.3, 33.5, 36.4, 36.6, 37.0, 34.3, 32.5
   31.4, 34.4, 35.6, 37.3, 37.3, 37.5, 36.9, 37.0, 36.3, 36.9

   सापेक्ष आर्द्रता (% में)

   90, 97, 92, 95, 93, 85, 83, 85, 83, 77, 83, 77, 74, 60, 71,
   65, 74, 80, 87, 95, 93, 82, 81, 76, 61, 63, 58, 58, 56, 57

6. किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों की परीक्षा में प्राप्त अंक (75 में) नीचे दिए गए हैं :

   42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29
   59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51

   समान वर्ग अंतरालों को लेकर जिनमें एक 0–10 हो, बारंबारता सारणी और संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

7. एक टोकरी में से यादृच्छिक (Random) रूप से चुने गए 30 संतरों के भार (ग्रामों में) नीचे दिए हैं :

   45, 55, 30, 110, 75, 100, 40, 60, 65, 40, 100, 75, 70, 60, 70
   70, 60, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90

   समान वर्ग अन्तरालों को लेकर जिनमें एक 30–40 हो, उपरोक्त आँकड़ों के लिए संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

8. किसी विशेष वर्ष में किसी जिले के प्राथमिक पाठशाला के शिक्षकों की आयु (वर्षों में) का बंटन निम्नानुसार है :

आयु (वर्षों में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
शिक्षकों की संख्या	10	30	50	50	30	6	4

(i) प्रथम वर्ग की निम्न सीमा लिखिए।

(ii) चतुर्थ वर्ग की वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

(iii) वर्ग 45-50 का वर्ग चिह्न ज्ञात कीजिए।

(iv) वर्ग आमाप ज्ञात कीजिए।

(v) संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

9. किसी कक्षा के 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की संचयी बारंबारता बंटन सारणी नीचे दी गई है :

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
20 से कम	17
40 से कम	22
60 से कम	29
80 से कम	37
100 से कम	50

उपरोक्त आँकड़ों से एक बारंबारता सारणी बनाइए।

10. किसी बंटन के वर्ग चिह्न इस प्रकार हैं -

47, 52, 57, 62, 67, 72, 77, 82

ज्ञात कीजिए

(i) वर्ग आमाप

(ii) वर्ग सीमाएं

(iii) वास्तविक वर्ग सीमाएं

18.5 सांख्यिकी आँकड़ों का आलेखी निरूपण

हमने अपरिष्कृत आँकड़ों से प्रारंभ किया और बारंबारता सारणी में उनका विन्यास करके उनके प्रमुख लक्षण ज्ञात किए। बहुधा आँकड़ों को चित्रों द्वारा निरूपित करने पर हमें श्रेष्ठतर संदर्श प्राप्त होते हैं। चित्रों द्वारा निरूपण आंखों को आकर्षक लगते हैं और प्रेक्षक के मन पर अधिक गहरा एवं स्थायी प्रभाव छोड़ जाते हैं। निस्संदेह चित्रों द्वारा निरूपण के उचित शीर्षक होना चाहिए जिससे कि पढ़ने वाले को ज्ञात हो सके कि वे किस विषय से संबंधित हैं।

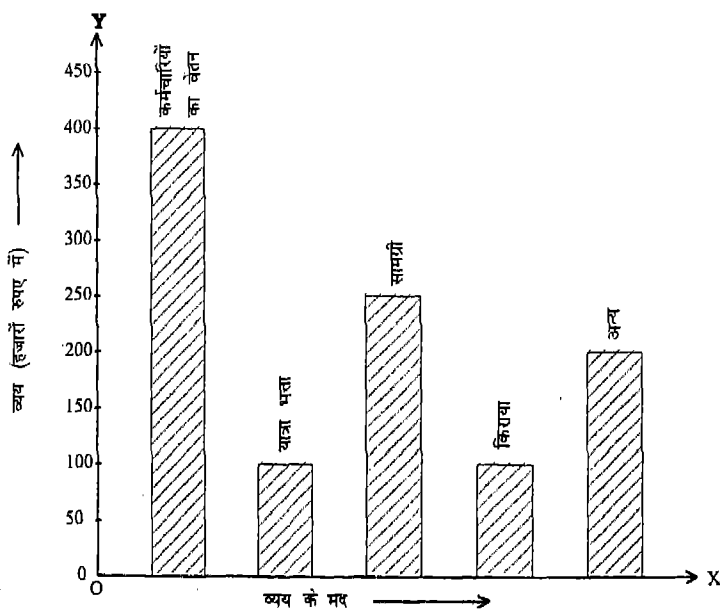
आपने पिछली कक्षाओं में दण्ड आलेख (bar chart) बनाना सीखा है। एक उदाहरण द्वारा हम उसका पुनर्स्मरण करते हैं।

उदाहरण 4 : भिन्न मदो पर एक कंपनी का व्यय (हजार रुपयों में) नीचे दिया है:

मद	व्यय (हजार रुपयों में)
कर्मचारियों का वेतन	400
यात्रा भत्ता	100
उपकरण	250
किराया	100
अन्य	200

उपरोक्त आँकड़ों को दर्शाने के लिए एक दण्ड आलेख खींचिए।

हल : हमें ज्ञात है कि एक दण्ड आलेख में, समान चौड़ाई के दण्ड, जिन्हें सामान्यत: आयतों का रूप दिया जाता है, x-अक्ष पर खींचे जाते हैं, उनके बीच बराबर स्थान होता है और आयतों की ऊंचाई जो कि विचर (यहाँ व्यय) के मान के समानुपाती है, y-अक्ष पर दर्शाते हैं। आयत की चौड़ाई का कोई महत्त्व नहीं होता है, अतिरिक्त इसके कि निरूपण आकर्षक दिखाई दे। दण्ड आलेख आकृति 18.1 में दर्शाया गया है :

विभिन्न मदों पर कंपनी का व्यय दर्शाने वाला दण्ड आलेख

आकृति 18.1

अब हम कुछ दूसरे प्रकार के आलेखी निरूपणों पर विचार करेंगे जैसे *आयत चित्र* (histogram) और *बारंबारता बहुभुज* (frequency polygon)

आयत चित्र : एक आयत चित्र बारंबारता बंटन का एक आलेखी निरूपण है। आयत चित्र में हम निम्न कार्य करते है :

(i) वर्ग सीमाओं* को x-अक्ष पर निरूपित करेंगे।

(ii) वर्ग बारंबारताओं को y-अक्ष पर निरूपित करेंगे।

(iii) हम आयतों की रचना करते हैं जिनके आधार x-अक्ष पर है और ऊंचाइयाँ** y-अक्ष के अनुसार।

आयत चित्रों में, प्रत्येक दो क्रमागत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को एक रेखाखण्ड द्वारा मिलाने से जो आकृति हमें प्राप्त होती है उसे *बारंबारता बहुभुज* कहते हैं। बहुभुज को पूरा करने के लिए प्रत्येक सिरे के मध्य बिन्दुओं को आसन्न निम्नतर या उच्चतर मध्य बिन्दु (जैसी स्थिति हो) से शून्य बारंबारता पर मिलाया जाता है।

अब हम एक उदाहरण द्वारा इसे समझाते हैं :

उदाहरण 5 : नीचे दिए गए आँकड़े एक नगर के साप्ताहिक निर्वाह सूचकांक दर्शाते हैं।

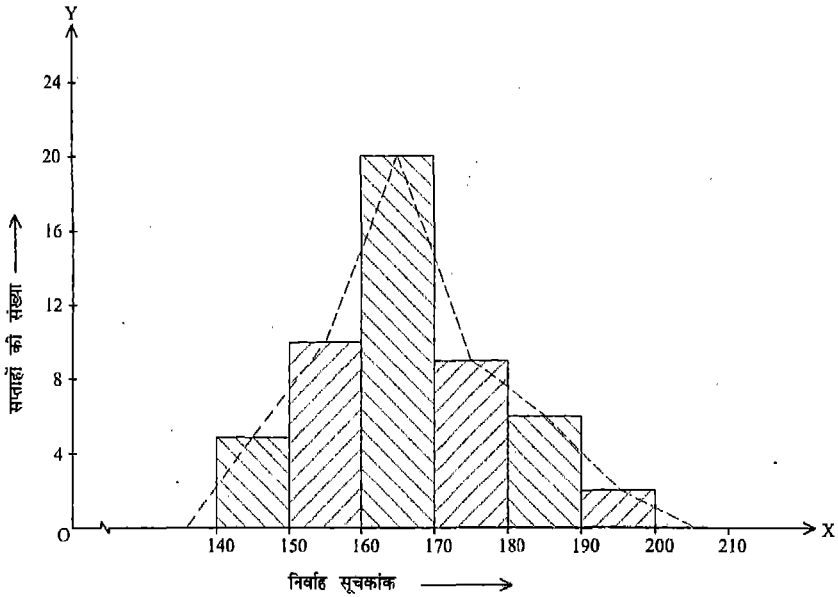
निर्वाह सूचकांक	सप्ताहों की संख्या
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
योग	52

* हम इस कारण वर्ग सीमा का सुझाव देते हैं जिससे कि आयतचित्र की रचना में कोई रिक्त स्थान न रहे।

** प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल संगत वर्ग बारंबारता के समानुपाती होना चाहिए। किन्तु हम समान अन्तरालों का उपयोग कर रहे हैं। इसलिए यह कहने में कोई त्रुटि नहीं कि आयत की ऊँचाई ही संगत वर्ग बारंबारता है।

उपरोक्त आँकड़ों के लिए आयत चित्र और बारंबारता बहुभुज बनाइए।

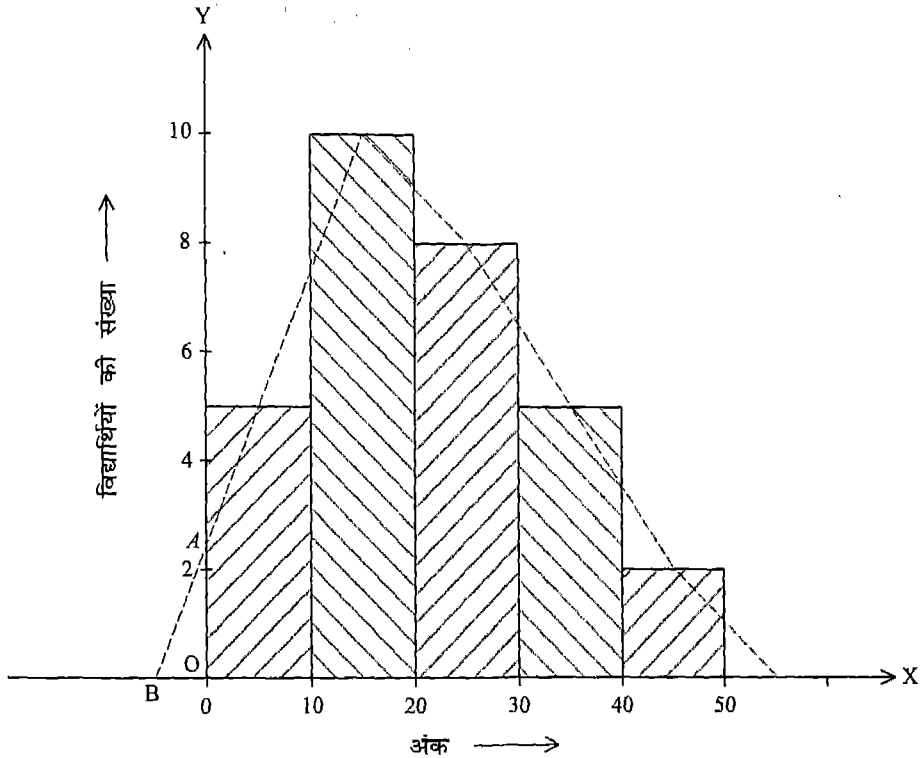
हल : आकृति 18.2 में आयत चित्र और बारंबारता बहुभुज (बिन्दुंकित रेखा से) एक ही पैमाने पर बनाए गए हैं।

1990-91 में नगर में निर्वाह सूचकांक

आकृति 18.2

उदाहरण 6: निम्न आँकड़ों के लिए एक ही आलेख पर आयत-चित्र एवं बारंबारता बहुभुज बनाइए।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–10	5
10–20	10
20–30	8
30–40	5
40–50	2
योग	30

हल : उपरोक्त आँकड़ों के लिए आयत चित्र एवं बारंबारता बहुभुज निम्न आकृति 18.3 में दर्शाए गए हैं :

30 विद्यार्थियों के अंकों के बंटन को दर्शाने वाले आयत-चित्र एवं बारंबारता बहुभुज

आकृति 18.3

टिप्पणी :

1. कभी कभी जब ऋणात्मक राशियों की अनुमति नहीं होती, बारंबारता बहुभुज का AB भाग निकाल दिया जाता है और उसकी जगह AO को लेकर बहुभुज पूरा किया जाता है। (आकृति 18.3)

2. यदि दोनों आयत-चित्र और बारंबारता बहुभुज की रचना करना हो, तो पहले आयत-चित्र बनाना सुविधाजनक होता है और बाद में बारंबारता बहुभुज। यदि अकेले बारंबारता बहुभुज बनाना है, तो वर्ग चिह्नों को x-अक्ष पर और बारंबारता

को Y-अक्ष पर निरूपित कर बिन्दुओं को आलेखित करते हैं, तत्पश्चात् बिन्दुओं को रेखाखण्डों द्वारा मिला देते हैं।

3. आलेख बनाते समय एक अन्य बात का भी ध्यान रखना है कि जिस अक्ष पर अपना मापन शून्य से प्रारंभ न होकर किसी दूसरे सुविधाजनक मान से प्रारंभ होता हो, वहाँ मूल बिन्दु के निकट एक भंग (Kink) ⌇ का चिह्न बना देते हैं।

प्रश्नावली 18.2

1. निम्न सारणी किसी नगर में शिक्षित महिलाओं की संख्या दर्शाती है :

आयु-वर्ग :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
महिलाओं की संख्या	300	980	800	580	290	50

उपरोक्त आँकड़ों को प्रदर्शित करने के लिए एक आयत-चित्र बनाइए।

2. 100 व्यक्तियों के भार (किग्रा में) का बंटन इस प्रकार है :

भार (किग्रा में) :	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
बारंबारता :	13	25	28	15	12	5	2

उपरोक्त आँकड़ों के लिए आयत चित्र एवं बारंबारता बहुभुज बनाइए।

3. एक प्रश्न को हल करने में 25 विद्यार्थियों द्वारा लिए गए समय (सैकन्डों में) का बंटन निम्नानुसार है :

समय (सैकन्डों में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	4	2	1

4. निम्न आँकड़ों के लिए आयत चित्र बनाइए। (एक ही आलेख पर) आयत चित्र एवं बारंबारता बहुभुज बनाइए।

निर्वाह सूचकांक	महीनों की संख्या
440-460	2
460-480	4
480-500	3
500-520	5
520-540	3

540-560	2
560-580	1
580-600	4
योग	24

5. पठन योग्यता की एक परीक्षा में विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिए गए हैं :

प्राप्तांक	50-52	47-49	44-46	41-43	38-40	35-37	32-34
विद्यार्थियों की संख्या	4	10	15	18	20	12	13

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बहुभुज बनाइए।

6. एक विद्यालय की कक्षा V के 60 विद्यार्थियों की बुद्धि लब्धि (intelligence quotient) निम्न सारणी में दी गई हैं :

बुद्धि लब्धि	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	5	16	14	13	7

उपरोक्त आँकड़ों के लिए बारंबारता बहुभुज बनाइए।

7. 200 विद्यार्थियों के एक प्रवेश परीक्षा में प्राप्त अंकों का बारंबारता बहुभुज बनाइए :

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
400-450	15
450-500	30
500-550	35
550-600	30
600-650	25
650-700	25
700-750	20
750-800	20
योग	200

18.6 दैनिक गतिविधियों से संबंधित आलेख

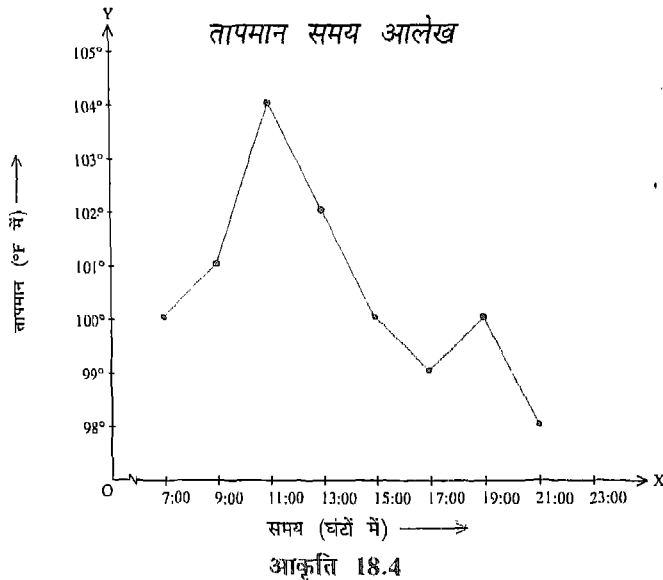
कभी कभी समय के भिन्न अन्तरालों पर किसी विचर की स्थिति का अनुमान आलेखों के द्वारा सुविधापूर्वक जाना जा सकता है। ये तापमान-समय आलेख, वेग-समय आलेख, रन प्रति ओवर आलेख आदि हो सकते हैं।

हम उदाहरणों के द्वारा इन्हें प्रदर्शित करेंगे :

उदाहरण 7 : एक रोगी को टायफाइड ज्वर के कारण अस्पताल में भर्ती किया गया। दिन के भिन्न समयों पर मापा गया तापमान निम्नानुसार हैं। आँकड़ों के लिए तापमान-समय आलेख बनाइए।

समय (घंटों में)	7.00	9.00	11.00	13.00	15.00	17.00	19.00	21.00
तापमान (°F में)	100	101	104	102	100	99	100	98

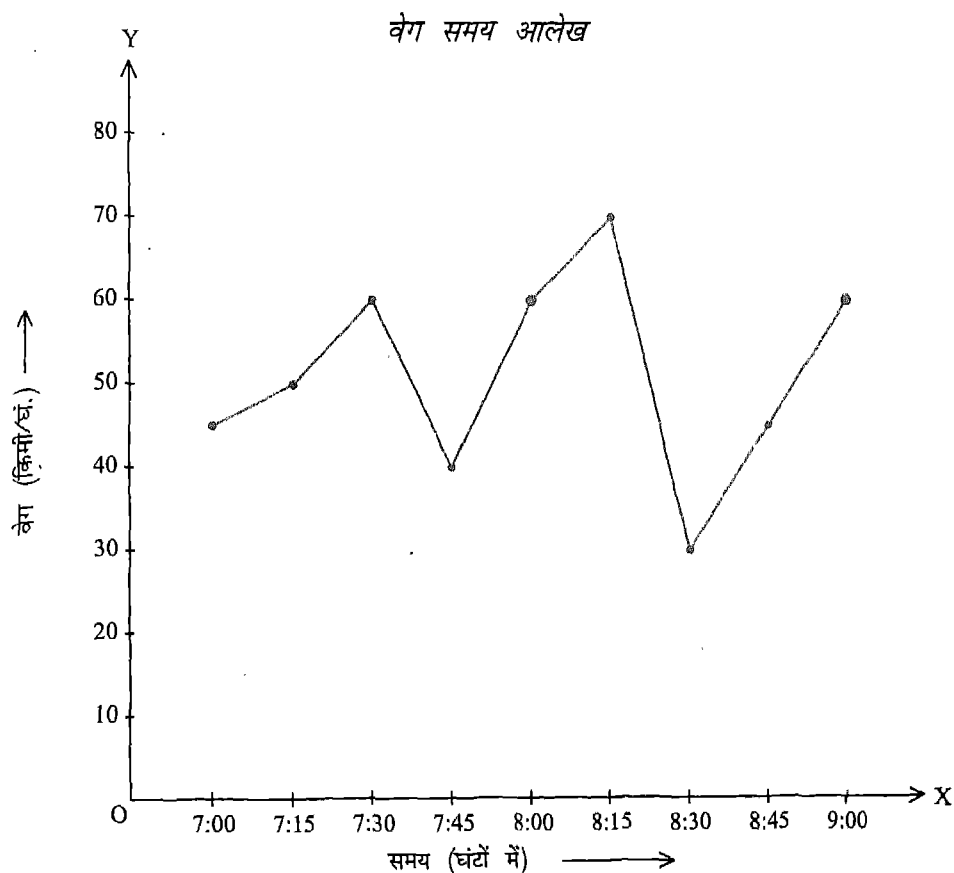
हल : निम्न आकृति 18.4 में तापमान-समय आलेख दर्शाया गया है :

आकृति 18.4

हम समय (घंटों में) x-अक्ष पर और तापमान °F में y-अक्ष पर निरूपित करते हैं। हम क्रमित युग्मों (7, 100), (9, 101), . . . (21, 98) बिन्दुओं द्वारा आलेखित करते हैं और रेखाखण्डों द्वारा उनको मिलाते हैं।

उदाहरण 8 : दिन के भिन्न समयों पर एक कार के वेग नीचे दिए गए हैं :

समय	7:00	7:15	7:30	7:45	8:00	8:15	8:30	8:45	9:00
वेग	45	50	60	40	60	70	30	45	60

उपरोक्त आँकड़ों के लिए वेग-समय आलेख बनाइए

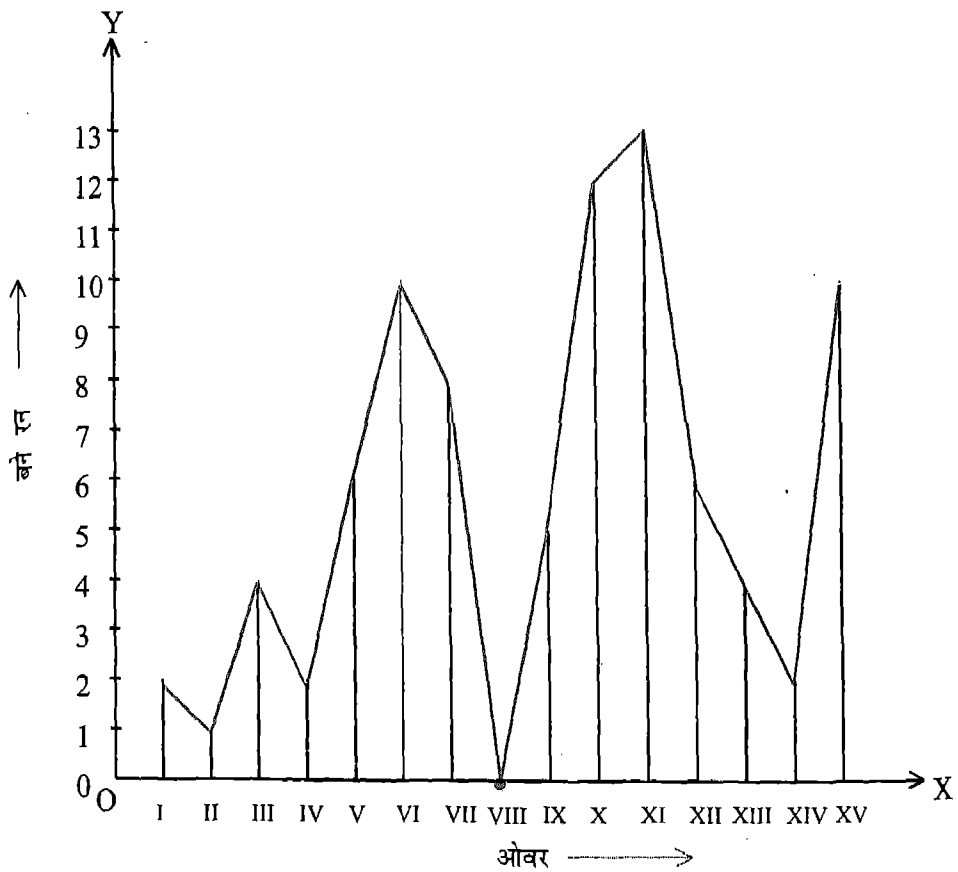
हल : आलेख आकृति 18.5 में दर्शाया गया है

आकृति 18.5

यहाँ (समय, वेग) को बिन्दुओं द्वारा आलेखित करते हैं, और फिर उन्हें रेखाखंडों से मिलाते हैं।

उदाहरण 9 : एक क्रिकेट टीम ने प्रथम 15 ओवर में जो रन बनाये, वे नीचे दिए गए हैं :

ओवर	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
रन	2	1	4	2	6	10	8	0	5	12	13	6	4	2	10

हल : आलेख आकृति 18.6 में दर्शाया गया है :

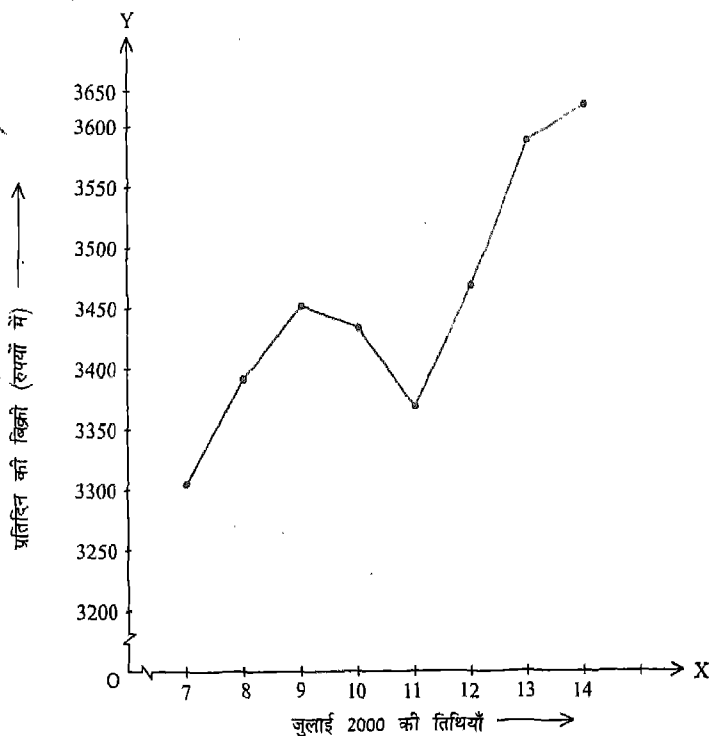
रन - ओवर आलेख

आकृति 18.6

उदाहरण 10 : किसी विक्रेता की जुलाई 2000 के आठ दिनों की बिक्री के आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

तिथि	7	8	9	10	11	12	13	14
बिक्री (रुपयों में)	3306	3392	3453	3435	3370	3470	3590	3620

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करते हुए आलेख बनाइए

हल : आलेख को निम्न आकृति 18.7 में दर्शाया गया है।

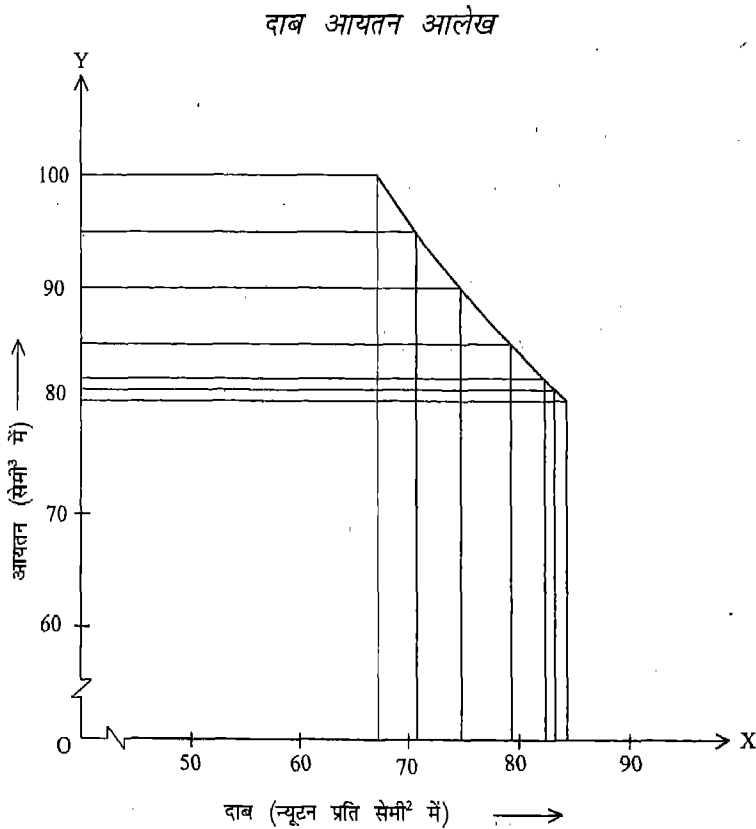
विक्रेता की जुलाई 2000 के आठ दिनों की बिक्री का आलेख

आकृति 18.7

हम तिथियों का X-अक्ष पर और बिक्री (रुपयों में) को Y-अक्ष के अनु निरूपित करते हैं। हम क्रमिक युग्मों (7,3306), (8,3392), . . . (14,3620) को बिन्दुओं द्वारा आलेखित करते हैं और उन्हें रेखाखंडों से मिलाने पर उपरोक्त आलेख प्राप्त होता है।

उदाहरण 11 : किसी गैस के दाब (न्यूटन प्रति सेमी^{2} में) और आयतन (सेमी^{3} में) के आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

दाब	67.5	71	75	79.5	82.3	83.5	84.5
आयतन	100	95	90	85	82	81	80

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करते हुए दाब-आयतन आलेख बनाइए।

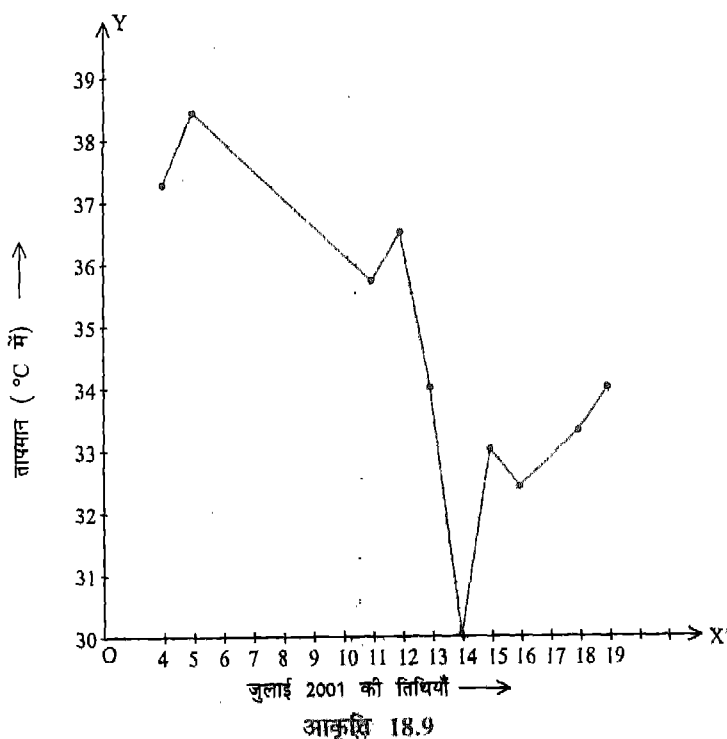
हल : हम X-अक्ष के अनु दाब के मान दर्शाते हैं और आयतन के मान Y-अक्ष के अनु और क्रमित युग्मों (67.5, 100), (71, 95), . . . (84.5, 80) को आलेखित करते हैं तथा उन्हें एक मुक्त हस्त वक्र द्वारा मिलाते हैं। निम्न आकृति 18.8 में आलेख दिया गया है।

आकृति 18.8

उदाहरण 12 : जुलाई 2001 के 10 दिनों के किसी शहर के अधिकतम तापमान नीचे दिए गए हैं :

जुलाई 2001 की तारीख	4	5	11	12	13	14	15	16	18	19
अधिकतम तापमान (°C में)	37.5	38.5	35.7	36.5	34.0	30.0	33.0	32.4	33.3	34.0

उपरोक्त आँकड़ों को निरूपित करते हुए एक आलेख बनाइए।

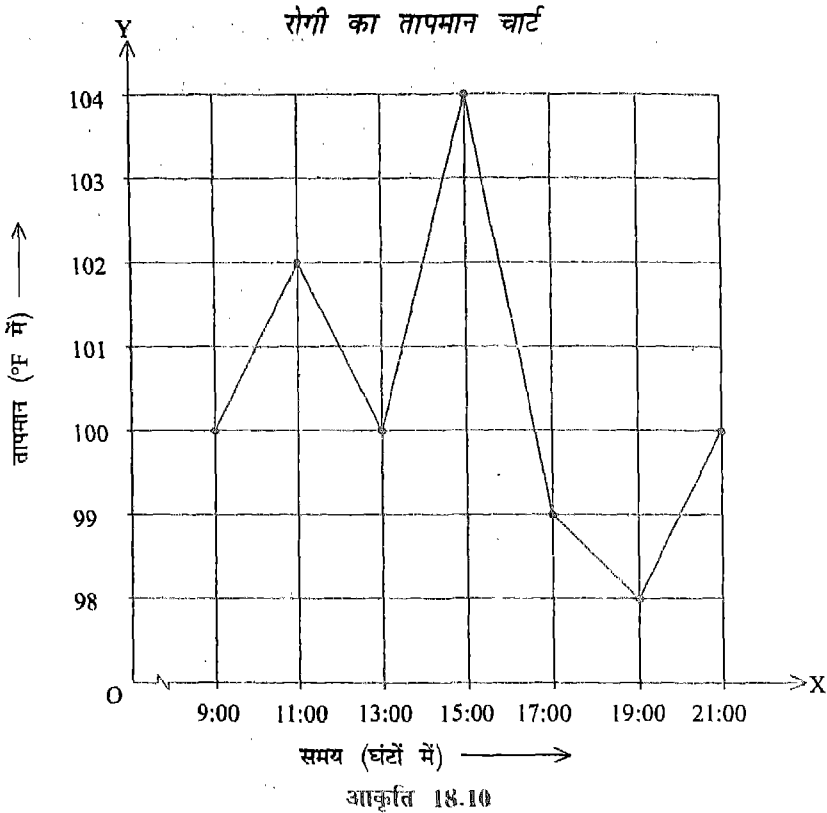
हल : हम महीने की तारीखें x-अक्ष पर निरूपित करते हैं और अधिकतम तापमान (°C में) को Y-अक्ष के अनु क्रमित युग्मों (4, 37.5), (5, 38.5), . . . (19, 34.0) को आलेखित करते हैं और रेखाखण्डों द्वारा उन्हें मिलाते हैं। जुलाई 2001 के 10 दिनों में अधिकतम तापमान दर्शाने वाला आलेख आकृति 18.9 में दिया गया है।

अधिकतम तापमान दर्शाने वाला आलेख

आकृति 18.9

18.7 आलेखों का पढ़ना

आलेखों की रचना थोड़ा कठिन अभ्यास है, किन्तु प्रतिदिन के आलेखों को पढ़ना सरल, उपयोगी और रोचक है। हम इसे उदाहरणों के द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 13 : एक रोगी का तापमान-चार्ट नीचे आकृति 18.10 में दिया गया है।

आकृति 18.10

(अ) रोगी का तापमान (i) 11.00 बजे (ii) 15.00 बजे ज्ञात कीजिए।

(ब) किस समय तापमान (i) अधिकतम है? (ii) न्यूनतम है?

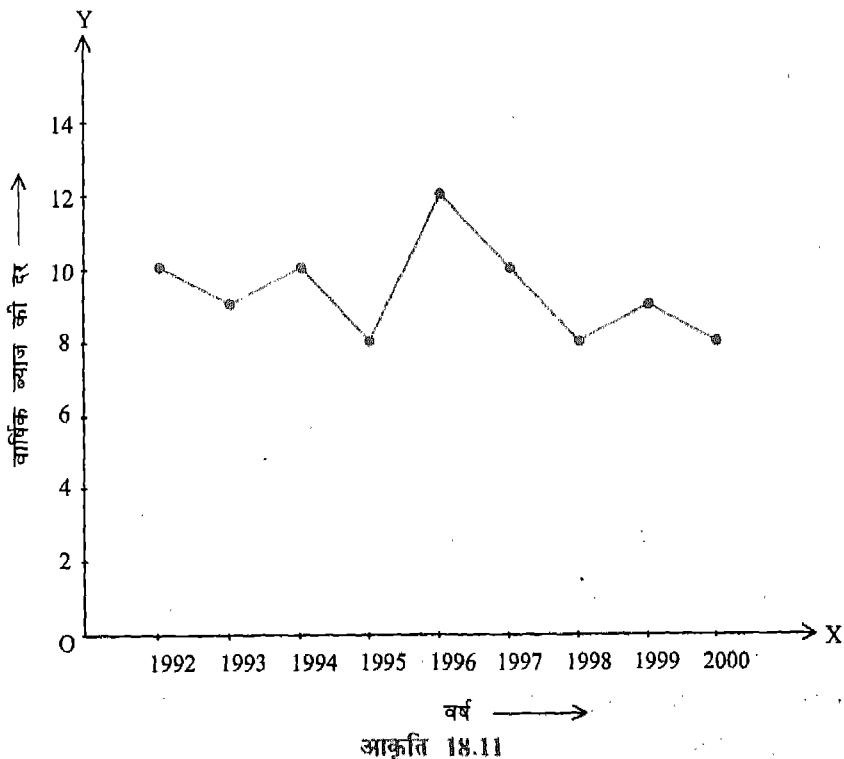
हल : आलेख से किसी समय का तापमान उसी प्रकार पढ़ा जा सकता है जैसे कि हम किसी बिंदु के निर्देशांक पढ़ते हैं। x-अक्ष पर समय (घंटों में) दर्शाए गए हैं और y-अक्ष पर तापमान (°F) में।

(अ) (i) रोगी का तापमान 11.00 बजे 102°F है।
(ii) रोगी का तापमान 15.00 बजे 104°F है।

(ब) तापमान है
(i) अधिकतम (104°F) 15.00 बजे और
(ii) न्यूनतम (98°F) 19.00 बजे।

उदाहरण 14 : एक वर्ष तक के सावधि जमा पर भिन्न वर्षों में ब्याज के परिवर्तन का आलेख नीचे आकृति 18.11 में दिया गया है।

आलेख को पढ़िए और ज्ञात कीजिए कि
(i) किस समयावधि में ब्याज की दर अधिकतम थी?
(ii) किस समयावधि में ब्याज की दर न्यूनतम थी?
(iii) जिस अवधि पर विचार हो रहा है उसमें ब्याज की दर के अधिकतम और न्यूनतम मानों का अन्तर क्या था।

आकृति 18.11

हल : (i) ब्याज की अधिकतम दर (12%) वर्ष 1996 में थी।

(ii) ब्याज की न्यूनतम दर (8%) वर्ष 1995, 1998 और 2000 में थी।

(iii) अंतर है (12–8)% या 4%

ऐसी बहुत सी स्थितियाँ आ सकती हैं जब आप आलेख को पढ़ने की प्रवीणता का उपयोग कर सकते हैं और उस सूचना को उपयोगी बना सकते हैं।

प्रश्नावली 18.3

1. निम्न स्थितियों में तापमान-समय आलेख बनाइए :

(i)

समय (घंटों में)	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00	20:00
तापमान (°F में)	100	101	104	103	99	98	100

(ii)

समय (घंटों में)	7:30	9:30	11:30	13:30	15:30	17:30	19:30	21:30
तापमान (°F में)	99	100.5	102	101.5	104	103	101	99.5

(iii)

समय (घंटों में)	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
तापमान (°F में)	102	101	103	105	102	100	99.5	99	100.5

2. एक कार 5.00 बजे यात्रा प्रारम्भ करके 16 घंटों की लंबी यात्रा पर जा रही है। भिन्न घंटों पर कार की गति नीचे दी गई हैं :

समय (घंटों में)	5:00	7:00	9:00	11:00	13:00	15:00	17:00	19:00	21:00
वेग (किमी/घंटे में)	40	50	60	80	70	65	75	60	50

उपरोक्त आँकड़ों के लिए वेग-समय आलेख बनाइए।

3. निम्न आँकड़ों के लिए वेग-समय आलेख बनाइए।

समय (घंटों में)	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00
वेग (किमी/घंटे में) :	30	45	60	50	70	50	40	45

4. दो टीम A एवं B द्वारा प्रथम दस ओवर में बनाए रन नीचे दिए हैं :

(a)

ओवर	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
टीम A :	2	1	8	9	4	5	6	10	6	2
टीम B :	5	6	2	10	5	6	3	4	8	10

(b)

ओवर	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
टीम A :	4	7	8	6	10	5	8	7	6	5
टीम B :	3	2	10	2	6	3	4	2	6	10

उपरोक्त आँकड़ों को प्रदर्शित करते हुए उन्हीं अक्षों पर आलेख बनाइए।

5. किसी बैंक द्वारा एक वर्ष तक के सावधि जमा पर समय समय पर परिवर्तित ब्याज दरें नीचे दी गई हैं।

(a)

वर्ष :	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
ब्याज दर :	12%	11.5%	11%	10%	10%	9.5%	8.5%

(b)

वर्ष :	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ब्याज दर :	13%	12.5%	12%	12%	11%	10%	10%	9%

उपरोक्त आँकड़ों को प्रदर्शित करते हुए प्रत्येक स्थिति के लिए आलेख बनाइए।

18.8 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

हमने पिछले अनुच्छेद में पढ़ा है कि सामान्यतः किसी सांख्यिकीय अन्वेषण में संग्रहित आँकड़े अपरिष्कृत आँकड़ों के रूप में होते हैं। यदि आँकड़े बहुत वृहत् होते हैं, तो हमें उनसे अधिक सूचना नहीं मिल पाती है। इसी कारण आँकड़ों का वर्गीकरण किया जाता है, जिससे कि उनसे प्रासंगिक सूचना मिल सके।

कभी कभी हम आँकड़ों का वर्णन अंकगणितीय दृष्टि से करना चाहते हैं जिससे कि हम उनसे अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकाल सकें। दूसरे शब्दों में हम कुछ ऐसी संख्याएँ प्राप्त करना चाहते हैं जो कि आँकड़ों के कुछ लक्षणों को निरूपित करें। इन्हें आँकड़ों को अंकगणितीय वर्णनात्मक मान (या स्थान निर्धारण माप या केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप) (Measures of Location or Central Tendency) कहते हैं।

माध्य (Mean) (या अंकगणितीय औसत) एक ऐसा ही माप है जिसका सामान्यतः अधिकतम उपयोग किया जाता है। बल्लेबाजी की औसत, गेंदबाजी की औसत, गोलों की औसत, औसत वर्षा, औसत ब्याज की दर आदि को याद कीजिए।

(i) *अपरिष्कृत आँकड़ों का माध्य*

मान लीजिए किसी टोकरी से यादृच्छिक रूप से चुने गए 10 सेबों के भारों (ग्राम में) पर हम विचार करें।

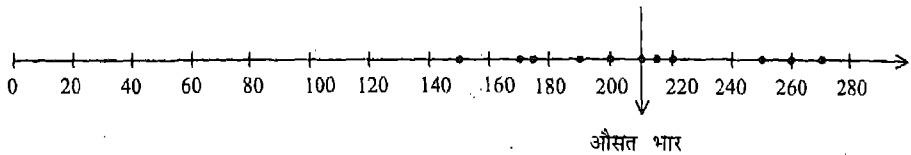
150, 200, 175, 170, 250, 215, 220, 260, 270, 190

सभी 10 सेबों के भारों का योग करके और उनके योगफल को 10 से भाग देकर एक सेब का औसत भार प्राप्त किया जा सकता है।

एक सेब का औसत भार (ग्राम में)

$$= \frac{(150+200+175+170+250+215+220+260+270+190)}{10}$$

$$= \frac{2100}{10} \text{ या } 210 \text{ ग्राम}$$

यदि हम संख्या रेखा पर इन बिन्दुओं को आलेखित करें तो हमें निम्न आकृति 18.12 प्राप्त होती है।

आकृति 18.12

आलेख से हम देख सकते हैं कि सेबों के भार माध्य भार (या औसत) भार के आस-पास केंद्रित होते हैं।

अपरिष्कृत आँकड़ों का माध्य निम्न सूत्र से प्राप्त होता है।

$$\bar{x} = \text{माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (1)$$

जहाँ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n प्रेक्षण है और x उनका माध्य है।

(1) को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (i = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

उदाहरण 15 : आटे की चक्की से आटे की दैनिक बिक्री नीचे दी गई है :

दिन :	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
आटे की बिक्री (किग्रा में)	120	110	70	80	40	210

चक्की के आटे की प्रतिदिन बिक्री ज्ञात कीजिए।

हल : औसत $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$= \frac{1}{6}$ (120+110+70+80+40+210)

$= \frac{1}{6}(630) = 105$

आटे की प्रतिदिन औसत बिक्री 105 किग्रा है।

टिप्पणी : माध्य की इकाई वही होगी हो जो कि अलग अलग प्रेक्षणों की है।

उदाहरण 16 : किसी कक्षा-परीक्षा में 20 विद्यार्थियों के निम्न प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए। (अधिकतम अंक 50)

25, 40, 15, 16, 28, 39, 41, 22, 28, 30
36, 40, 30, 18, 22, 32, 48, 32, 38, 40

हल : विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का माध्य

$= \frac{1}{20}$ (25+40+15+16+28+39+41+22+28+30+
36+40+30+18+22+32+48+32+38+40)

$= \frac{1}{20}(620) = 31$

एक विद्यार्थी के औसत प्राप्तांक 31 हैं।

उदाहरण 17 : यदि 10, 12, 18, 13, p और 17 का माध्य 15 है, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हमें ज्ञात है कि

$$15 = \frac{10+12+18+13+p+17}{6}$$

या $90 = 70 + p$

या $p = 20$

(ii) *अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य*

मान लीजिए $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ प्रेक्षण है जिनकी बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_n, ... f_n$ हैं। यह अपरिष्कृत आँकड़ों की एक विशेष स्थिति है जहाँ प्रेक्षण x_1, f_1 बार आता है, x_2, f_2 बार आता है और इसी प्रकार।

$\therefore$ सभी प्रेक्षणों का योग = $f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + ... + f_n x_n$

और प्रेक्षणों की संख्या $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$ है

$\therefore$ उपरोक्त आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + ... + f_n x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}$$

इसको इस प्रकार भी दर्शाया जाता है

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

या $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$$

जहाँ $$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

हम एक उदाहरण द्वारा इसे प्रदर्शित करते हैं

उदाहरण 18 : एक कारखाने के 60 कर्मचारियों के वेतन निम्नलिखित है :

वेतन (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या
1500	16
2000	12
2500	10
3000	8
3500	6
4000	4
4500	3
5000	1
योग	60

कारखाने के एक कर्मचारी का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए।

हल : माध्य $\bar{x}$ =

$$\frac{16\times1500+12\times2000+10\times2500+8\times3000+6\times3500+4\times4000+3\times4500+1\times5000}{60}$$

$$= \frac{24000+24000+25000+24000+21000+16000+13500+5000}{60}$$

$$= \frac{152500}{60}$$

$= \quad 2541.7$ (निकटतम)

अर्थात् कारखाने के एक कर्मचारी का माध्य वेतन 2541.70 रु. (निकटतम) है।

(iii) *माध्यिका*

केन्द्रीय प्रवृत्ति का अन्य माप जिसका बहुधा उपयोग किया जाता है, वह *माध्यिका* है। यदि अपरिष्कृत आँकड़ों के मानों को आरोही (या अवरोही) क्रम में रखा जाए, तो इस विन्यास के ठीक बीच के मान को माध्यिका कहा जाता है। अपरिष्कृत आँकड़ों की माध्यिका का परिकलन निम्न प्रकार से किया जाता है:

(i) यदि प्रेक्षणों की संख्या n विषम है, तब $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ मान माध्यिका होगी।

(ii) यदि प्रेक्षणों की संख्या n सम है, तब माध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें एवं $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों का माध्य होगी।

हम इसे उदाहरणों के द्वारा प्रदर्शित करेंगे

उदाहरण 19 : निम्न आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

15, 35, 18, 26, 19, 25, 29, 20, 27

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में विन्यास करने पर हमें प्राप्त होता है

15, 18, 19, 20, 25, 26, 27, 29, 35

यहाँ $n = 9$, एक विषम पूर्णांक है

$\therefore$ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ या 5 वाँ प्रेक्षण माध्यक होगी

$\therefore$ माध्यक = 25

उदाहरण 20 : निम्न आँकड़ों की माध्यक ज्ञात कीजिए।

78, 56, 22, 34, 45, 54, 39, 68, 54, 84

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में विन्यास करने पर हमें प्राप्त होता है

22, 34, 39, 45, 54, 54, 56, 68, 78, 84

यहाँ $n = 10$, एक सम पूर्णांक है

$\therefore$ माध्यक = $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों का माध्य अर्थात् 5 वें और 6 वें प्रेक्षणों का माध्य

$$= \frac{54+54}{2} = 54$$

उदाहरण 21 : निम्न आँकड़ों को परिमाण के आरोही क्रम में विन्यास किया गया है।

59, 62, 65, $x, x + 2$, 72, 85, 94

यदि माध्यक का मान 69 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ प्रेक्षणों की संख्या सम है

$\therefore$ माध्यक $= \frac{x+(x+2)}{2} = x+1$

माध्यक 69 दी गई है

$\therefore$ $x+1 = 69$ या $x = 68$

(iv) बहुलक

कभी कभी केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अन्य मान का उपयोग अधिक सुविधाजनक होता है जिसे बहुलक (Mode) कहते हैं, क्योंकि यह व्यापार और उद्योग में अधिकतम उपयोगी है।

बहुलक आँकड़ों में चर का वह मान है जो सबसे अधिक बार उपस्थित होता है अर्थात् वह प्रेक्षण जिसकी बारंबारता अधिकतम है, उसे *बहुलक* कहते हैं। सिले सिलाए कपड़ों एवं जूतों के उद्योग इस अवधारणा का उपयोग करते हैं। वे उन कालर-नापों/जूतों के नापों का अधिक उत्पादन करते हैं, जिनकी अधिकतम माँग है और दूसरे नापों का उत्पादन कम करते हैं।

हम कुछ उदाहरणों द्वारा इसे समझाते हैं।

उदाहरण 22 : निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

15, 14, 19, 20, 14, 15, 16, 14, 15, 18, 14, 19, 15, 17, 15

हल : हम आँकड़ों से निम्न बारंबारता-सारणी बनाते हैं

x_i	14	15	16	17	18	19	20
f_i	4	5	1	1	1	2	1

यहाँ प्रेक्षण 15 की अधिकतम बारंबारता (5) है।

इसलिए बहुलक = 15

उदाहरण 23 : उपरोक्त उदाहरण में, यदि अंतिम प्रेक्षण को परिवर्तित कर 14 कर दिया जाए, तो नए बहुलक को ज्ञात की कीजिए।

हल : उस परिवर्तन से हमें निम्न बारम्बारता-सारणी प्राप्त होती है।

x_i	14	15	16	17	18	19	20
f_i	5	4	1	1	1	2	1

∴ बहुलक = 14

18.9 माध्य के गुण धर्म

1. समस्त प्रेक्षणों का उनके माध्य ($\bar{x}$) से विचलनों का योगफल शून्य होता है, अर्थात्

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

2. यदि $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ...,$ समूहों के माध्य हैं जिनमें प्रेक्षणों की संख्या क्रमशः n_1, $n_2, n_3, ------, n_n$ है, तब सभी समूहों को एक साथ लेने पर, उनका माध्य $\bar{x}$, जिसे संयुक्त माध्य कहते हैं, निम्न से दिया जाता है

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + ...n_n\bar{x}_n}{n_1 + n_2 + n_3 + ...+n_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

3. यदि आँकड़ों में से प्रत्येक प्रेक्षण को माध्य ($\bar{x}$) से बदल दिया जाये, तब सारे प्रेक्षणों का कुल योग नहीं बदलता।

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n\bar{x} \qquad (1)$$

$$\bar{x} + \bar{x} + ... + \bar{x} = n\bar{x} \qquad (2)$$

4. यदि $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है, तब $x_1 \pm a,\ x_2 \pm a, x_3 \pm a, ..., x_n \pm a$ का माध्य $\bar{x} \pm a$ है।

5. यदि $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है, तब $ax_1, ax_2, ..., ax_n$ का माध्य $a\bar{x}$ और $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, ..., \frac{x_n}{a}$ का माध्य $\frac{\bar{x}}{a}$ है, जहाँ $a \neq 0$ है।

13.10 माध्यक के गुणधर्म

1. माध्यक का मान आलेखीय विधि से ज्ञात किया जा सकता है, जब कि माध्य का नहीं।

2. माध्यक से लिए गए निरपेक्ष विचलनों का योग आँकड़ों में से अन्य किसी प्रेक्षण से लिए गए निरपेक्ष विचलनों के योग से कम होता है।

2, 3, 5, 7, 9 की माध्यक 5 है।

$$|2-5|+|3-5|+|5-5|+|7-5|+|9-5| = 11 \qquad (i)$$

$$|2-3|+|3-3|+|5-3|+|7-3|+|9-3| = 13 \qquad (ii)$$

$$|2-9|+|3-9|+|5-9|+|7-9|+|9+9| = 19 \qquad (iii)$$

यह देखा जाता है कि (i), (ii) और (iii) में से (i) न्यूनतम है।

3. यह चरम मानों से अप्रभावित रहती है।

18.11 बहुलक के गुणधर्म

1. इसका परिकलन आलेखीय विधि से किया जा सकता है।
2. यह चरम मानों से अप्रभावित है।
3. यह विवृत अंत बटनों एवं गुणात्मक आँकड़ों के लिए भी उपयोगी है।

प्रश्नावली 18.4

1. किसी परीक्षण में 20 विद्यार्थियों के निम्न प्राप्तांकों (100 में से) का माध्य ज्ञात कीजिए।

   76, 44, 45, 87, 71, 72, 82, 83, 41, 32,
   75, 32, 46, 78, 17, 70, 84, 12, 77, 74.

2. 25 विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (सेमी में) नीचे दी गई हैं, उनका माध्य ज्ञात कीजिए।

   150, 152, 150, 154, 155, 159, 165, 148, 147, 160, 162, 165, 167,
   149, 150, 157, 152, 154, 152, 157, 162, 160, 159, 158, 170.

   उपरोक्त आँकड़ों का माध्यक भी ज्ञात कीजिए।

3. (i) निम्न आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

   25, 27, 19, 29, 21, 23, 25, 30, 28, 20.

   दर्शाइए कि समस्त प्रेक्षणों का माध्य से विचलनों का योगफल शून्य होता है।

   (ii) प्रश्न 3 (i) में दत्त आँकड़ों की माध्यक ज्ञात कीजिए।

4. 10, 12, 16, 20, P और 26 का माध्य 17 है। P का मान ज्ञात कीजिए।
5. यदि 10 प्रेक्षणों का माध्य 20 है और अन्य 15 प्रेक्षणों का माध्य 16 है, तो कुल 25 प्रेक्षणों का माध्य ज्ञात कीजिए।
6. 13 प्रेक्षणों का माध्य 14 है। यदि प्रथम 7 प्रेक्षणों का माध्य 12 है और अंत के 7 प्रेक्षणों का माध्य 16 है, तो 7वें प्रेक्षण को ज्ञात कीजिए।
7. निम्न बंटनों में से प्रत्येक का माध्य ज्ञात कीजिए :

(i)

x_i	10	15	20	25	30	35	40	योग
f_i	4	6	8	18	6	5	3	50

(ii)

x_i	12	13	14	15	16	17	18	योग
f_i	1	3	4	8	10	3	1	30

(iii)

x_i	50	75	100	125	150	175	200	योग
f_i	12	18	50	70	25	15	10	200

8. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, जहाँ प्रेक्षणों $x_1, x_2 ..., x_n$ का माध्य है।

9. निम्न बंटनों की माध्यक ज्ञात कीजिए :

   (i) 15, 40, 25, 16, 28, 32, 36, 42, 16, 19, 28

   (ii) 72, 68, 42, 33, 35, 39, 40, 41, 65, 69

   (iii) 36, 39, 78, 42, 48, 52, 68, 69, 72, 71

10. निम्न प्रेक्षणों को आरोही क्रम में विन्यास किया गया है। यदि प्रेक्षणों की माध्यक 63 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

    29, 32, 48, 50, x, $x+2$, 72, 78, 84, 95

11. निम्न आँकड़ों में से प्रत्येक का बहुलक ज्ञात कीजिए।

    (i) 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23 22, 14, 18

    (ii) 7, 9, 12, 13, 7, 12, 15, 7, 12, 7, 25, 18, 7

12. एक सर्वे के द्वारा प्रात भिन्न नापों की कमीज़ की माँग नीचे दी गई है :

नाप	38	39	40	41	42	43	44
व्यक्तियों की संख्या	26	29	20	15	13	7	5

सर्वे से प्रेक्षित कमीज़ नापों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) 0.42 (ii) 0.654 (iii) 3.375 (iv) 0.2 (v) $0.8\overline{3}$

   (vi) $0.\overline{142857}$ (vii) $0.\overline{153846}$ (viii) $0.\overline{6470588235294117}$

2. उदाहरणार्थ $\frac{5}{2}$, 2.010020003..., अनन्त

3. (i) वास्तविक, परिमेय संख्याएं, अपरिमेय संख्याएं

   (ii) सांत, आवर्ती

   (iii) 0.296

   (iv) परिमेय

4. ऐसे अनेकों उदाहरण हैं। फिर भी कुछ उत्तर निम्न हैं :

   (i) $2 + \sqrt{3},\ -2 + \sqrt{3}$

   (ii) $2\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

   (iii) $5 + \sqrt{5},\ 5 - \sqrt{5}$

   (iv) $5\sqrt{7}\ ,\ 2\sqrt{7}$

   (v) $2 - \sqrt{3}\ ,\ 2 + \sqrt{3}$

   (vi) $2\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}$

   (vii) $2\sqrt{5},\ \sqrt{5}$

   (viii) $2\sqrt{15}\ ,\ 2\sqrt{5}$

5. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{3}{11}$ (iii) $\frac{34}{9}$ (iv) $\frac{610}{33}$

6. (i) परिमेय, 2 (ii) अपरिमेय
(iii) परिमेय, 1.2 (iv) अपरिमेय
(v) परिमेय, – 0.8 (vi) परिमेय, 10

7. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय (iii) परिमेय
(iv) अपरिमेय (v) अपरिमेय (vi) परिमेय
(vii) अपरिमेय

8. परिमेय संख्या 0 को किसी भी अपरिमेय संख्या 'a' से गुणा करने पर परिमेय संख्या 0 आती है।

प्रश्नावली 1.2

1. (i), (ii), (v), (vii), (viii), (ix) और (x) करणी हैं।
(iii), (iv), और (vi) करणी नहीं हैं।

प्रश्नावली 1.3

1. (i) $a = 2, b = -1$ (ii) $a = \frac{11}{7}$, $b = \frac{6}{7}$

(iii) $a = 11, b = -6$ (iv) $a = \frac{31}{19}$, $b = \frac{10}{19}$

(v) $a = \frac{-37}{103}$, $b = \frac{-15}{103}$

2. $a = 0$, $b = \frac{-2}{3}$

3. (i) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ (iii) $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$

(iv) $17 - 12\sqrt{2}$ (v) $\frac{1}{5}(\sqrt{7} - \sqrt{2})$ (vi) $\frac{25 + \sqrt{3}}{22}$

(vii) $\frac{42}{11}$ (viii) $-8\sqrt{5}$ (ix) $\frac{1}{3}(2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{21})$

(x) $\frac{1}{12}(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{30})$

प्रश्नावली 2.1

1. (a) $3x(x + 2y)$ (b) $7mn(1 - 3mn)$
   (c) $pq(3pq + 2p^2 + 9q)$ (d) $a^2b^2(ab + 2 + b^2)$
   (e) $2(23x^2 + xy + 5y^3)$ (f) $(a + b)(p^2 + q^2)$

2. (a) $(2x + y)(2x + y)$ (b) $(3x - y)(3x - y)$
   (c) $(x + 2y)(x - 2y)$ (d) $(5p + 6q)(5p - 6q)$
   (e) $(7a - 3b)(7a - 3b)$ (f) $(4x + 3y)(4x + 3y)$
   (g) $(x + y + 1)(x - y + 1)$ (h) $(2a + 2b + 1)(2a - 2b + 1)$

3. (a) $(p + q + 3r)(p + q + 3r)$ (b) $(2a + b + 2)(2a + b + 2)$
   (c) $(x - y + z)(x - y + z)$ (d) $(2a + 3b + c)(2a + 3b + c)$

4. (a) $(x + 2y)(x + 2y)(x + 2y)$ (b) $(2x + y)(2x + y)(2x + y)$
   (c) $(2p + 3q)(2p + 3q)(2p + 3q)$ (d) $(2p - 3q)(2p - 3q)(2p - 3q)$
   (e) $(x - 4)(x - 4)(x - 4)$ (f) $(ax - b)(ax - b)(ax - b)$

5. (a) $(x + 4)(x - 3)$ (b) $(x - 5)(x - 5)$
   (c) $(x + 11)(x - 11)$ (d) $(x - 9)(x - 1)$
   (e) $(x + y + 1)(x + y - 1)$ (f) $(x - 1)(x - 1)(x - 1)$
   (g) $(x + p + 2)(x + p + 2)$

6. $8a^3$

7. (a) $(\frac{2}{3}a + b)(\frac{2}{3}a + b)$ (b) $(a - \frac{1}{2}b)(a - \frac{1}{2}b)$
   (c) $\frac{1}{4}(x + y)(x - y)$ (d) $(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
   (e) $(p - \frac{1}{3}q)(p - \frac{1}{3}q)(p - \frac{1}{3}q)$ (f) $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)$

10. (a) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$ (b) $(a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2)$
    (c) $(a - b + c)(a + b - c)$ (d) $(x + 3y)(x + 4y)$
    (e) $(x - b)(x + 2a + b)$ (f) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 6)$

11. $(x + ay)(x + by)$

प्रश्नावली 2.2

1. (a) $(5x + 1)(x + 3)$ (b) $(3x + 2)(3x + 4)$
   (c) $(x + 7)(2x - 3)$ (d) $(x - 5)(2x + 3)$
   (e) $(x - 4)(3x - 2)$ (f) $(u - 2)(3u - 4)$
   (g) $(2u + 3)(3u + 4)$ (h) $(8p - 3)(3p - 4)$
   (i) $(p + 1)(4p - 21)$

2. (a) $\frac{1}{6}(3x-1)(2x+1)$ (b) $\frac{1}{8}(4x-1)(4x-1)$
   (c) $\frac{1}{12}(6x-1)(4x-1)$ (d) $\frac{1}{35}(7x+1)(5x+1)$
   (e) $\frac{1}{21}(21x-1)(21x-1)$

3. (a) $(\sqrt{2}x+1)(x+\sqrt{2})$ (b) $(2x+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
   (c) $\sqrt{5}(\sqrt{5}x+1)(\sqrt{5}x+3)$ (d) $(2x+\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
   (e) $(\sqrt{7}x+\sqrt{2})(\sqrt{7}x+\sqrt{2})$

प्रश्नावली 2.3

1 (a) $(4a + 3p)(16a^2 - 12ap + 9p^2)$ (b) $(x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$
  (c) $(10s + 3t)(100s^2 - 30st + 9t^2)$ (d) $(6x - 5y)(36x^2 + 30xy + 25y^2)$
  (e) $(3t + 7)(9t^2 - 21t + 49)$ (f) $(4 - 7z)(16 + 28z + 49z^2)$
  (g) $(a + b - 2)\{(a + b)(a + b + 2) + 4\}$ (h) $8(y + 2b)(y^2 - 2by + 4b^2)$
  (i) $2b(3a^2 + b^2)$

2. (a) $(a + 2b + 3c)(a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2ab - 6bc - 3ac)$
   (b) $(p - 3q + 2r)(p^2 + 9q^2 + 4r^2 + 3pq + 6qr - 2pr)$
   (c) $(x + y + 4)(x^2 + y^2 - xy - 4y - 4x + 16)$
   (d) $(2x - 5y + 6)(4x^2 + 25y^2 + 10xy + 30y - 12x + 36)$
   (e) $(\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b + c)(2a^2 + 8b^2 + c^2 - 4ab - 2\sqrt{2}bc - \sqrt{2}ac)$
   (f) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + \sqrt{5})(2x^2 + 3y^2 - \sqrt{6}xy - \sqrt{15}y - \sqrt{10}x + 5)$

3. (a) $x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$ (b) $x^3 - 8y^3 - z^3 - 6xyz$
(c) $x^3 - 8y^3 + 27 + 18xy$ (d) $27x^3 - 125y^3 - 180xy - 64$

4. (a) 0 (b) 0 (c) 0

प्रश्नावली 2.4

1. (a) -1 (b) 20 (c) -13
(d) 212 (e) -52 (f) $\frac{-25}{4}$

2. (a), (b), (e) : हां (c), (d), (f) : नहीं

3. (a), (b), (e), (f): गुणनखंड है। (c), (d): गुणनखंड नहीं है।

4. (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{7}{6}$ (c) $\frac{3}{2}$

5. (a) $\frac{-4}{3}$ (b) 0

6. (a) -1 (b) $\frac{-1}{3}$

प्रश्नावली 2.5

1. (a) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$ (b) $(x + 2)(2x + 3)(2x + 3)$
(c) $(z - 3)(3z - 10)(3z + 10)$ (d) $(x - 1)(x + 5)(x + 9)$

2. (a) $(x - 1)(x - 10)(x - 12)$ (b) $(y + 3)(y - 1)(y - 2)$
(c) $(x + 1)(x + 3)(x - 14)$ (d) $(x - 1)(x + 5)(x + 9)$
(e) $(y + 3)(y + 2)(y - 7)$ (f) $(2y - 7)(y - 2)(y + 3)$
(g) $(3u - 4)(u - 2)(u + 2)$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 3 : 4 (ii) 7 : 9 (iii) 1 : 4

2. (i), (ii), (iii). 3 : 2. इस प्रकार के और अनन्त अनुपात हैं।

3. (i) 2 (ii) 3 (iii) $\frac{1}{8}$

4.	(i) 4 : 11	(ii) 11 : 13	
5.	3 : 4	**6.**	4 और 8
7.	24 और 32	**8.**	13

प्रश्नावली 3.2

1.	(i) 2	(ii) 6	(iii) 6
2.	(i) 60	(ii) 28	(iii) 18
3.	(i) 3	(ii) 4	(iii) 8
4.	(i) 12	(ii) 16	(iii) 24
5.	(i) $3:2::12:8$	(ii) $p:b::c:q$	(iii) $r:5::9:t$
6.	(i) $2:10::3:15$	(ii) $b:q::p:c$	(iii) $5:t::r:9$
7.	(i) $15:3::5:1$	(ii) $(b+p):p::(q+c):c$	(iii) $(15+r):r::(k+9):9$
8.	(i) $5:3::10:6$	(ii) $b-p:p::q-c:c$	(iii) $3:2::t-9:9$
9.	(i) $5:1::20:4$	(ii) $(b+p):(b-p)::(q+c):(q-c)$	
	(iii) $(5+r):(5-r)::(t+9):(t-9)$		

13. 2 **14.** 2

15. (i) 11 (ii) $\frac{263}{20}$ (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) $\frac{5a}{13}$

प्रश्नावली 4.1

1. 4	**2.** -8	**3.** 5
4. 2	**5.** 3	**6.** $\frac{11}{2}$
7. 4	**8.** 6	**9.** $2(1+\sqrt{3})$

प्रश्नावली 4.2

1.	(a) I	(b) I	(c) III	(d) II
	(e) IV	(f) III	(g) II	(h) IV

2. B, D, E, और G. **3.** C, D, F, और H. **4.** चतुर्भुज **5.** त्रिभुज

प्रश्नावली 4.3

1. (a), (c), (d), और (e)

2. (a) (3,0), (0,6) (b) (4,0), (0,–2) (c) (2,0), (0, –5)
 (d) (–3,0), (0, 9) (e) (–5, 0), (0, 2.5) (f) (–3,0), (0, 1.5)

3. अनेकों हलों में से कुछ हल निम्न हैं :
 (a) $x = 4, y = 1;\ x = 9, y = -1; x = -1, y = 3; x = 6.5, y = 0; x = 1.5, y = 2$
 (b) $x = -1,\ y = 3;\ x = -4, y = 8;\ x = 5, y = -7; x = 2,\ y = -2$
 (c) $x = 2, y = 0; x = -1, y = 2; x = -4, y = 4; x = 5, y = -2; x = 3.5, y = -1$
 (d) $x = -4, y = 1; x = -7, y = -1; x = -1, y = 3; x = 2, y = 5; x = -5.5, y = 0$
 (e) $x = 1, y = 3; x = 4, y = 5; x = -5, y = -1; x = -3.5, y = 0$
 (f) $x = 0, y = -4; x = -4, y = 0; x = \ y = -2; x = -3, y = -1; x = -1, y = -3$

4. अनेकों संभव हलों में से कुछ हल निम्न हैं :
 (a) $x = y = 0; x = -5, y = 12; x = -10, y = 24; x = 5, y = -12; x = 10, y = -24$
 (b) $x = y = 0; x = 3, y = 5; x = 6, y = 10; x = 9, y = 15; x = -3, y = -5; x = -6, y = -10$
 (c) $x = 0, y = 2; x = 3, y = 0; x = 1.5, y = 1; x = 6, y = -2; x = -3, y = 4$
 (d) $x = -1, y = 1; x = -2.5, y = 0; x = y = 5; x = 2, y = 3; x = -4, y = -1$
 (e) $x = 0, y = 1; x = 1.5, y = 2; x = y = 3; x = -3, y = -1; x = 6, y = 5; x = 9, y = 7$
 (f) $x = y = 0; x = y = 1; x = y = 2; x = y = 3; x = y = -3; x = y = -2$
 (g) $x = -1, y = 1;\ x = 1; y = -1; x = 0, y = 0, x = 3, y = -3$
 (h) $x = y = 0; x = y = -1; x = y = 4; x = y = 2$
 (i) $x = 0, y = 1; x = 0, y = 2; x = 0, y = -3; x = 0, y = 3$

5. (a) $x = 2, y = 0; x = 0, y = 3;$ और $x = 2, y = 0; x = 0, y = -5.$ हाँ, $x = 2, y = 0.$
 (b) $x = 3, y = 0; x = 0, y = 5$ और $x = 2, y = 0; x = 0, y = 5.$ हाँ, $x = 0, y = 5.$
 (c) $x = 7, y = 0; x = 0, y = 9$ और $x = 10, y = 0; x = 0, y = -10.$ नहीं

6. (a) 3 (b) 12 (c) 8
 (d) 5 (e) 3 (f) 0

प्रश्नावली 5.1

1. 3.75% 2. 4.5% 3. 90000 क्विंटल 4. 2000 5. 690
6. (i) 30 रु. (ii) 40 रु. 7. (i) 40 रु. (ii) 32 रु.
8. (i) 400 (ii) 33% 9. (i) 700 (ii) 33%
10. 9160 11. 37.5% 12. 54.5%
13. 980 रु. और 7000 रु. 14. $33\frac{1}{3}\%$ 15. 214.5 ग्राम
16. 2700 17. 12500 रु. 18. 4 लीटर 19. 100500 रु.

प्रश्नावली 5.2

1. 25% 2. 550 रु., 750 रु. 3. 42000 रु. 4. 38,400:5%
5. 15% 6. हानि 1% 7. 4000 रु., 5000 रु.
8. लाभ 25% 9. 699.20 रु. 10. 36
11. हानि 37.5% 12. लाभ 12.5% 13. 17500 रु., 12500 रु.

प्रश्नावली 5.3

1. 55.25 रु., 9.75 रु. 2. 2208 रु., 92 रु. 3. 8.5%
4. (i) 162.22 रु., (ii) 946.36 रु., (iii) 3252.35 रु. 5. 91.08 रु.
6. 22725.90 रु. 7. 69.50 रु. 8. 236.25 रु.
9. (i) 46%, (ii) 46% ; हाँ 10. लाभ 25% 11. 937.50 रु.
12. 269.56 रु. 13. 15% 14. दूसरा; 3.40 रु.
15. 600 रु. 16. हानि 10%

प्रश्नावली 5.4

1. 11550 रु. 2. 27000 रु. 3. 150 4. 4%
5. 8000 रु. 6. 1300 रु., 1456 रु. 7. 10% 8. 13.75%
9. 9405 रु. 10. 233 रु. 11. 876 रु. 12. 219450 रु.
13. 48070 रु. 14. 16350 रु.

प्रश्नावली 5.5

1. 138.48
2. 137.37
3. लगभग 163.11
4. लगभग 119.81
5. 147.98
6. लगभग 137.67
7. 116
8. 10350 रु.
9. 9787.50 रु.

प्रश्नावली 6.1

1. 27783 रु., 3783 रु.
2. 103030.10 रु., 3030.10 रु.
3. $\frac{1}{2}$ वर्ष
4. 125000 रु.
5. 25% प्रति वर्ष
6. $1\frac{1}{2}$ वर्ष
7. $\frac{1}{2}$ वर्ष
8. 8000 रु., 10% प्रति वर्ष
9. A ने ज्यादा दिया; 1450 रु.
10. 101400 रु., 93750 रु.
11. 6352.50 रु., 1352.50 रु.
12. 31500 रु.
13. 19684 रु., 275684 रु.
14. 1 वर्ष
15. 20% प्रति वर्ष
16. 12000 रु., 10% प्रति वर्ष
17. 20000 रु., 10% प्रति वर्ष
18. 25% प्रति वर्ष
19. 45 वर्ष
20. 21 रु.

प्रश्नावली 6.2

1. 877.50 रु.
2. 262440 रु.
3. 20577 रु.
4. 17136 रु.
5. 480000 रु.
6. 5% प्रति वर्ष
7. 7942
8. 7311616, 6250000
9. $1\frac{1}{2}$ वर्ष
10. 387500 रु.
11. 5% प्रति वर्ष
12. 16704 वर्ष
13. 3 वर्ष
14. 54400 रु.

प्रश्नावली 7.1

1. जनवरी – 5990 रु., फरवरी – 7040 रु., मार्च – 7090 रु.
2. जून – 1200 रु., जुलाई – 1600 रु.
3. 265 रु.
4. 450 रु.
5. 863 रु.
6. 400, 400, 100, 500

7. 65 रु. 8. 51 रु. 9. 62.50 रु. 10. 104.25 रु.

11. 87.75 रु. 12. 127.50 रु. 13. 46 रु., 3346 रु. 14. 50 रु.

प्रश्नावली 7.2

1. 20706.12 रु. 2. 56243.20 रु. 3. 732.63 रु. 4. 1648.35 रु.

5. 23328 रु. 6. 81629.33 रु. 7. 97200 रु. 8. 22497.28 रु.

9. 12597.12 रु. 10. 181958.40 रु.

प्रश्नावली 8.1

1. $30°$ 2. (i) $105°$, (ii) $70°$ 3. $a = 130°$, $b = 50°$

4. $a = 105°, b = 75°$ 5. $110°$ 6. $18°$ 13. $15°$

14. (i) $30°$, $30°$ और $30°$

(ii) $\angle GOD$, $\angle FOC$, $\angle EOB$ और $\angle DOA$

(iii) $\angle GOF$, $\angle FOD$; $\angle FOE$, $\angle EOC$; $\angle EOD$, $\angle DOB$

(iv) $\angle GOF$, $\angle DOB$; $\angle GOF$, $\angle EOC$; $\angle GOF$, $\angle COA$

(v) $\angle GOF$, $\angle FOE$; $\angle GOF$. $\angle FOD$; $\angle GOF$, $\angle FOC$

(vi) $\angle GOF$,$\angle FOA$; $\angle GOE$,$\angle EOA$; $\angle GOD$,$\angle DOA$

(vii) $\angle GOD$, $\angle FOC$; $\angle GOD$, $\angle EOB$; $\angle FOC$, $\angle EOB$

15. $135°, 45°, 135°$ 16. $15°$ 17. $40°, 50°, 90°, 40°$

20. $110°, 110°$ 21. (i) T (ii) F (iii) F (iv) F (v) T (vi) T (vii) F

22. (i) अद्वितीय (ii) रेखाएं (iii) एक समांतर या लम्ब (iv) तीन, आधा तल, रेखा (v) अधिक कोण (vi) $180°$ (vii) उभयनिष्ठ भुजा के अतिरिक्त (viii) बराबर

प्रश्नावली 8.2

2. $108°, 72°, 108°, 72°, 108°, 72°$. 6. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

13. नहीं, प्रत्येक कोण $90°$ 20. (i) F (ii) T (iii) F (iv) T (v) F

21. (i) बराबर (ii) संपूरक (iii) समांतर (iv) समांतर (v) समांतर (vi) समांतर

प्रश्नावली 8.3

1. 70°, 45°
2. 40°, 60°, 80°
4. 80°, 65°

5. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) नहीं (vi) हाँ

6. 160°
12. 60°
19. 95°, 85°

20. 36°
22. (i) F (ii) T (iii) F (iv) F (v) T (vi) F (vii) T

23. (i) 180° (ii) अभ्यंतर (iii) बड़ा (iv) एक (v) एक (vi) 360°

प्रश्नावली 9.1

17. CD नापकर क्योंकि $\Delta AOB \cong \Delta COD$.
18. (i) F (ii) T (iii) T (iv) F (v) F (vi) F (vii) T
19. (i) अन्तर्गत (ii) तीन (iii) QRP (iv) FDE (v) FDE (vi) AC

प्रश्नावली 9.2

21. (i) T (ii) T (iii) F (iv) T (v) T (vi) F (vii) F
22. (i) बराबर (ii) बराबर (iii) बराबर (iv) AC (v) EFD (vi) 20° (vii) RQ

प्रश्नावली 10.1

17. (i) F (ii) T (iii) T (iv) F (v) T (vi) F
18. (i) बड़ा (ii) छोटा (iii) लम्ब (iv) कम
    (v) अधिक (vi) कम (vii) सबसे बड़ा (viii) बड़ा

प्रश्नावली 11.1

7. (i) F (ii) T (iii) F (iv) F (v) T (vi) T (vii) F (viii) F

प्रश्नावली 11.2

15. (i) समद्विबाहु (ii) समकोण त्रिभुज (iii) समांतर चतुर्भुज (iv) 1 : 3

प्रश्नावली 12.1

1. 3 सेमी और 7 सेमी त्रिज्या वाले संकेन्द्र वृत्त।

2. दिये हुए बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड का लम्ब समद्विभाजक।

3. आधार के समांतर सरल रेखा।

4. 5 सेमी त्रिज्या वाला संकेन्द्री वृत्त।

6. BC के लम्ब समद्विभाजक पर PQ पुनः स्थित है।

8. एकल बिन्दु जो कि A, B, C से होकर जाते हुए वृत्त का केन्द्र है।

9. ऐसे किसी बिन्दु का अस्तित्व नहीं है।

11. दो बिन्दु, जो कि AB के लम्ब समद्विभाजक पर और AB के मध्य बिन्दु से एक दूसरे के विपरीत 4 सेमी दूरी पर स्थित हैं।

प्रश्नावली 12.2

1. हाँ

2. एकल बिन्दु जो कि त्रिभुज का अन्तः केन्द्र है।

3. रेखाखंड PQ और $\angle BAC$ का समद्विभाजक का प्रतिच्छेद वाला एकल बिन्दु; हाँ।

5. बिन्दु O से 5 सेमी दूरी पर कोण समद्विभाजक पर स्थित चार बिन्दु।

6. (i) दोनों रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजक का युग्म।

(ii) दोनों रेखाओं के बीचों बीच और उनके समांतर रेखा।

(iii) त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़कर बने त्रिभुज का परिकेन्द्र।

प्रश्नावली 12.3

7. त्रिभुज का अन्तः केन्द्र

8. त्रिभुज का परिकेन्द्र

प्रश्नावली 13.1

10. दो रेखाएँ जो कि रेखा खंड AB के दोनों ओर AB से $\frac{2k}{AB}$ दूरी पर हैं।

प्रश्नावली 15.1

1. $\frac{4}{5}, \frac{4}{3}$ 2. $\frac{20}{29}, \frac{29}{21}$ 3. $\frac{24}{7}, \frac{25}{24}$

4. $\frac{40}{41}, \frac{41}{9}$ 5. $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = 1$, $\text{cosec}\,\theta = \sqrt{2}$, $\sec\theta = \sqrt{2}$, $\cot\theta = 1$

6. (i) $\frac{5}{13}, \frac{5}{12}$ (ii) $\frac{12}{13}, \frac{5}{12}$

7. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$, $\text{cosec}\,A = \frac{5}{3}$, $\sec A = \frac{5}{4}$, $\cot A = \frac{4}{3}$

8. (i) $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan B = 1$

(ii) $\sin B = \frac{12}{13}$, $\cos C = \frac{12}{13}$, $\tan B = \frac{12}{5}$

(iii) $\sin B = \frac{21}{29}$, $\cos C = \frac{21}{29}$, $\tan B = \frac{21}{20}$

9. $\frac{3}{160}$ 10. $\frac{841}{160}$ 11. $\frac{1}{8}$ 12. $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$ 13. $\frac{3}{8} + 2\sqrt{2}$

15. 2 18. 3 19. $\frac{b+a}{b-a}$ 20. $6 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ 21. $\frac{12}{7}$

प्रश्नावली 15.2

1. (i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (ii) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (iii) 9 (iv) $\frac{3}{4}$ (v) $2\sqrt{2} - 4$

(vi) 0 (vii) $\sqrt{3} - 1$ (viii) $\frac{3}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ (ix) $\frac{55}{6}$

5. $A = 45°$, $B = 45°$ 6. $A = 45°$, $B = 15°$ 7. $20°$

प्रश्नावली 15.3

1. $BC = 6$ सेमी, $AC = 6\sqrt{3}$ सेमी

2. (i) $\angle A = 45°$, $BC = 5$ सेमी, $AC = 5\sqrt{2}$ सेमी

   (ii) $\angle C = 60°$, $AB = 4\sqrt{3}$ सेमी, $BC = 4$ सेमी

   (iii) $\angle A = 30°$, $AB = 3\sqrt{3}$ सेमी, $AC = 6$ सेमी

   (iv) $\angle A = 30°$, $BC = 2.5$ सेमी, $AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ सेमी

   (v) $\angle C = 45°$, $AB = 7.5$ सेमी, $AC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ सेमी

   (vi) $\angle C = 30°$, $BC = 11\sqrt{3}$ सेमी, $AC = 22$ सेमी

3. (i) $\angle P = 60°$, $\angle O = 30°$, $OM = 3\sqrt{3}$ सेमी

   (ii) $\angle P = 45°$, $\angle O = 45°$, $OM = 5$ सेमी

   (iii) $\angle O = 60°$, $\angle P = 30°$, $OM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ सेमी

   (iv) $\angle O = 60°$, $\angle P = 30°$, $PM = 4\sqrt{3}$ सेमी

   (v) $\angle O = 45°$, $\angle P = 45°$, $OP = 5\sqrt{2}$ सेमी

प्रश्नावली 16.1

1. (i) 290.47 सेमी^{2} (ii) 30 सेमी^{2} (iii) 150 सेमी^{2} (iv) $100\sqrt{3}$ सेमी^{2}
2. 16 सेमी, 63 सेमी, 504 सेमी^{2}
3. 210 मी, 168 मी, 10584 मी^{2}
4. $16\sqrt{3}$ सेमी^{2}, $4\sqrt{3}$ सेमी
5. 60 सेमी^{2}
6. 336 सेमी^{2}
7. 9000 मी^{2}

प्रश्नावली 16.2

1. 55 सेमी^{2}
2. 750 सेमी^{2}
3. 18 सेमी^{2}
4. 612 सेमी^{2}
5. 51 सेमी^{2}
6. 48 सेमी, 1320 सेमी^{2}
7. 306 मी^{2}

प्रश्नावली 16.3

1. 271.047 सेमी^{2} 2. 9.625 सेमी^{2} 3. 18 सेमी, 36 π सेमी^{2} 4. 114 sq units
5. 9.625 सेमी^{2}, 6.125 सेमी^{2} 6. 183.33 सेमी^{2} 7. 550 सेमी^{2} 8. 1600 सेमी^{2}
9. (i) 8.8 सेमी (ii) 154 सेमी^{2} 10. (i) 22 सेमी (ii) 231 सेमी^{2} (iii) 40.27 सेमी^{2}

विविध प्रश्नावली

1. 154 सेमी^{2} 2. 175 सेमी^{2} 3. 14 सेमी 4. 9.72 सेमी^{2}
5 102 .67 सेमी^{2} 6. 66.5 सेमी^{2} 7. 24 सेमी

प्रश्नावली 17.1

1. (i) 7260 सेमी^{3} (ii) 8400 सेमी^{3} 2. (i) 10 सेमी (ii) 8.4 सेमी
3. (i) 240 सेमी^{2}, $(240 + 32\sqrt{3})$ सेमी^{2} (ii) 1536 सेमी^{2}, $(1536 + 128\sqrt{3})$ सेमी
(iii) 48 सेमी^{2}, $(48 + 8\sqrt{3})$ सेमी^{2} 4. 300 सेमी^{2}, $(300 + 50\sqrt{3})$ सेमी^{2}
5. $294\sqrt{3}$ सेमी^{3} 6. 10 सेमी, 4 सेमी 7. 8 सेमी 8. 4 मी

प्रश्नावली 17.2

1. (i) 150 सेमी^{3} (ii) 3010 सेमी^{3} 2. (i) 9 सेमी (ii) 4.5 सेमी
3. (i) 30 सेमी^{2}, $(30+ 4\sqrt{3})$ सेमी^{2} (ii) 36 सेमी^{2}, $(36 + 16\sqrt{3})$ सेमी^{2}
(iii) $75\sqrt{3}$ सेमी^{2}, $100\sqrt{3}$ सेमी^{2}
4. 0.577 मी^{3} 5. $36\sqrt{3}$ सेमी^{3} 6. $16\sqrt{3}$ सेमी^{2}, $16\frac{\sqrt{2}}{3}$ सेमी^{3}
7. 288 सेमी^{3} 8. (i) $10\frac{\sqrt{3}}{3}$ सेमी (ii) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ सेमी^{2} 9. 8 इकाई

प्रश्नावली 17.3

1. (i) F = 6, E = 12, V = 8, F–E + V = 2 (ii) F = 5, E = 9, V = 6 F – E + V = 2
(iii) F = 7, E = 15, V = 10, F – E + V = 2 (iv) F = 5 , E = 8, V= 5, F– E + V = 2
(v) F = 7, E = 12, V = 7, F – E + V = 2
2. (i) $n + 2$, $3n$, $2n$ (ii) $n + 1$, $2n$, $n + 1$
3. (i) 6 (ii) 12 (iii) 12 (iv) 10 (v) 5 4. 6

प्रश्नावली 18.1

5. (i)

अधिकतम तापमान (°C में)	बारंबारता
28.6	1
30.3	1
30.4	1
31.0	1
31.4	1
31.6	1
32.4	1
32.5	2
32.6	1
33.3	1
33.5	1
33.8	1
33.9	1
34.3	1
34.4	1
34.9	1
35.2	1
35.3	1
35.6	1
36.3	1
36.4	1
36.6	1
36.9	2
37.0	2
37.3	2
37.5	1

(ii)

आपेक्षिक आद्रता (% में)	बारंबारता
56	1
57	1
58	2
60	1
61	1
63	1
65	1
71	1
74	2
76	1
77	2
80	1
81	1
82	1
83	3
85	2
87	1
90	1
92	1
93	2
95	2
97	1

6.

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0–10	1	1
10–20	4	5
20–30	3	8
30–40	7	15
40–50	7	22
50–60	7	29
60–70	1	30
योग	30	

7.

संतरों के भार (g में)	संतरों की संख्या	संचयी बारंबारता
30–40	3	3
40–50	6	9
50–60	3	12
60–70	6	18
70–80	5	23
80–90	2	25
90–100	2	27
100–110	2	29
110–120	1	30
योग	30	

8. (i) 15, (ii) 30-35, (iii) 47.5 (iv) 5.

(v)

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
15–20	10	10
20–25	30	40
25–30	50	90
30–35	50	140
35–40	30	170
40–45	6	176
45–50	4	180
योग	180	

9.

अंक	संचयी बारंबारता	विद्यार्थियों की संख्या
0-20	17	17
20-40	22	5
40-60	29	7
60-80	37	8
80-100	50	13
	योग	50

10. (i) 5

(ii) 44.5–49.5, 49.5–54.5, 54.5–59.5, 59.5–64.5, 64.5–69.5, 69.5–74.5, 74.5–79.5, 79.5– 84.5

(iii) वही जैसा (ii) में है।

प्रश्नावली 18.4

1. 59.9 **2.** 156.56 ; 157 **3.** (i) 24.7 (ii) 25

4. 18 **5.** 17.6 **6.** 14

7. (i) 24.3 (ii) 15.2 (iii) 120.375 **9.** (i) 28 (ii) 41.5 (iii) 60

11. (i) 14 (ii) 7 **12.** 39 नाप